

## 一般相対論と量子力学の統合に向けて

—素粒子物理学と現代数学の新しい関係—

大栗博司

京都大学の数理解析研究所では、純粋および応用数学、コンピュータ・サイエンス、数理物理など数理科学の諸分野で世界をリードするような理論研究が活発に行われている。いつも海外の著名な研究者が多く訪れ、また研究所に設置された大学院では研究者の養成が熱心になされている。

いま、最先端の数学や物理の周辺でなにが起こっているか、数理解析研究所の活動の紹介を通じて、かいま見てみよう。

数学研究の成果は古来から自然科学の様々な分野に広用されてきました。また自然科学上の発見が数学の新しい発展を促すということも、歴史上しばしば見られるようです。私は素粒子物理学の理論を研究していますが、この分野でも特に1980年代の半ばごろから数学の最新の成果を取り入れた研究が活発になり、今世紀の理論物理学の最大の課題の一つである一般相対論の量子化(後述)に手が届きそうになってきました。

数学は自律的な学問で、外部の世界とは独立に存在していると言われます。たとえば皆さんが高校で習うユークリッドの幾何学は、地球以外のどの星に持っていかけても成り立つことが保証されています。このようにそれ自身で存在する数学の世界のことを、数学的アイデアと呼ぶこともあります。しかし数学の発展が外部の世界とまったく独立に起きているというわけではありません。自然科学の研究が数学的アイデアの中の未開拓の領域の存在を示唆し、そこから新しい数学が開花することも少なくありません。たとえば幾何学=geometry という言葉が地面(geo)の測量(metria)に由来していることから分かるように、ユークリッド幾何学は地面の測量という自然科学を通じて発見されました。またニュートンの物体の運動の研究が微分積分学の創設をもたらしたことも、自然科学の研究が数学の発展を促す例であると言えます。

ニュートンの力学について話を続けましょう。ニュートンは、力  $F$  を受けて運動する質量  $m$  の物体の時刻  $t$  における位置  $x(t)$  は、運動方程式

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F \quad (1)$$

に従うことを発見しました。力  $F$  が物体の位置  $x$  の関数として  $F=F(x)$  と与えられているときには、運動方程式(1)は  $x(t)$  に関する二階の微分方程式になります。したがって、ある特定の時刻  $t_0$  における物体の位置  $x(t_0)$  と速度  $(dx/dt)|_{t=t_0}$  を指定すると、それ以外の任意の時刻  $t$  の物体の位置  $x(t)$  は運動方程式(1)によって一意的に定まることになります。ある時刻の世界の状

態を知ればその後の時間発展が一意的に定まってしまうというこの考え方は、古典力学的世界観と呼ばれ、今世紀の初頭の量子力学の登場に到るまで物理学を支配してきました。

皆さんは天気予報で「現在ここにある低気圧は明日にはこちらに移動するでしょう」というのを聞いたことがあるでしょう。これも古典力学的世界観の例です。気象を知る上で重要な要素は大気の状態です。そして大気の状態は、地上の各点での気圧や風速・風向などで指定されます。このような大気の状態は、ナビア=ストークスの方程式に従って時間発展することが知られています。天気予報が可能なのもそのためです。ナビア=ストークスの方程式をここで書き下すことはできませんが、気象の他にも海流の変化から飛行機の設計に到るまで、流体の運動に関わるさまざまな現象がこの方程式に支配されています。

電磁気の理論も古典力学的世界観に沿って構成されました。高校の物理では時間変化を伴わない静的な電磁気現象を取り扱うことが多いと思いますが、電荷や電流の分布が変化すれば、電場や磁場の状態も一般には変化します。電磁場の時間発展の方程式はマックスウェルによって発見されました。流体のナビア=ストークス方程式と電磁場のマックスウェル方程式はいずれも19世紀の物理学の成果です(マックスウェルは流体の運動を参考にして電磁場の方程式に到達したと言われています)。

古典力学的世界観の最後を飾るのが、1915年に完成されたアインシュタインの一般相対性理論です。この理論は物質の間の重力相互作用を記述します。物体の間の電磁気力を伝えるものが電場と磁場であるのに対し、アインシュタインの理論で重力を担うのは時空間の曲がり具合です。時空間の曲がり具合などという抽象的概念が登場するため、一般相対性理論を初等的に解説することは容易ではありませんが、次のように考えてみてください。二次元の曲がった曲面を思い浮かべてみましょう。曲面は場所ごとに平坦であったり球面のように曲がっていたりすることでしょう。その曲がり具合は、曲面のあちらこちらに小さな三角形を描いてその内角の和を求めることで測ることができます。もし内角の和が  $180^\circ$  であれば、曲面はその三角形の近くでは平坦であると言えます。また  $180^\circ$  より大きければ曲面は球面のように曲がっていると分かります。内角の和が  $180^\circ$  より小さく

なることもあります。どの様な曲面か考えてみてください。アインシュタインの理論では、二次元の曲面の代わりに、私たちの住んでいる三次元の空間に時間の一次元をつけ加えた四次元の時空間を考え、この時空間の曲がり具合を考えます。電磁気の理論では電荷を持った物質が電場や磁場に影響を与えますが、一般相対論では物質があると時空間の曲がり具合が変化します。また逆に時空間が曲がるとその中の物質の運動の仕方に影響が現れます。このような〔物質〕→〔時空間の曲がり具合の変化〕→〔物質の運動への影響〕というプロセスを重力相互作用としてとらえるのが一般相対論の根幹です。電磁気の理論では電場や磁場の時間発展はマックスウェルの方程式に従いますが、一般相対論ではアインシュタインの方程式が時空間の曲がり具合の時間発展を定めます。この点で一般相対論は古典力学的世界観の思想圏に属すると言えます。

量子力学の誕生（1925年）は、このような古典力学的世界観に根本的な変更をもたらしました。これまで見てきたように、古典力学的世界観では対象の状態（物体の位置、大気の状態、電磁場、時空間の曲がり具合）は運動方程式（ニュートン、ナビア=ストークス、マックスウェル、アインシュタインの方程式）によって時間発展すると考えます。これに対し量子力学では状態は一意的に発展するわけではなく、古典力学では許されないような発展の仕方も含めて考える必要があります。私たちがキャッチボールをするとき、古典力学によると球は放物線を描いて相手に届くとされますが、量子力学では球が地球の裏側のブラジルを通して届く様な経路も計算に入れるのです。実際にはキャッチボールにブラジルの及ぼす効果は微々たるもので、古典力学と量子力学の考え方の違いは私たちが日常生活で直接経験する現象ではほとんど問題になりません。しかし原子の中の電子の運動等ミクロの世界では、量子力学の方が正しく現象を記述することが実証されています。私たちの家庭にある電子機器（テレビ、CDプレーヤー、パソコン等）は、そのほとんどが量子力学の原理に基づいて設計されています。

量子力学的世界観は今世紀の物理学の基礎となりました。ニュートンの運動方程式(1)はハイゼンベルグとシュレジンガーによって量子力学に翻訳(量子化)されました。電磁気学の量子化には困難な問題がありましたが、シュビンガー=朝永=ファインマンのくりこみの処方によって解決されました。電磁気力や重力のほかにも、素粒子の間に短距離( $<10^{-15}\text{m}$ )でのみ働く相互作用がありますが、これもくりこみの処方が適用でき量子化が可能であることが1960年代から1970年代の初めにかけて明らかにされました。しかし重力の理論については、いまだに量子化が遂行されていません。ちなみに流体の

ナビア=ストークス方程式は、原子レベルのより基本的な法則から導き出されるので、それ自身を量子化する必要はありません。

一般相対論を量子化しようという試みは1960年代ごろから始まりましたが、本格的に研究されるようになったのは1980年代になってからのことです。これは素粒子物理学が非常に高いエネルギー領域で起こる現象を扱うようになってきたことと関係しています。電子を1ボルトの電圧で加速して得られるエネルギーを1電子ボルトと呼びますが、素粒子の統一理論は $10^{25}$ 電子ボルト程度のエネルギーを問題にします。エネルギー $E$ と質量 $m$ の間には有名なアインシュタインの関係式 $E=mc^2$  ( $c$ は光の速度)が成り立ちますから、エネルギーが高くなるほど質量は重くしたがって重力の効果は強くなります。そして $10^{25}$ 電子ボルト程度のエネルギーになると、重力の量子化の効果が素粒子の現象に影響を及ぼすと考えられるようになってきたのです。

一般相対論の量子化には技術的な障害と概念的な問題があります。技術的な障害としては、四次元時空のアインシュタイン理論にはそのままではくりこみ処方が適用できないことが挙げられます。また重力の理論が時空の曲がり具合の変化を対象としているため、量子化のためには量子力学の枠組み自体を広げる必要があります。それがさまざまな概念的な問題を生みます。量子力学の考えを一般相対論にそのまま当てはめようとする、アインシュタインの方程式に従わないような曲がり具合の時空もすべて勘定に入れることになりますが、たとえば空間のあちらこちらにブラックホールが出来たり消えたりするような異常な時空も含めることが許されるのかどうか問題になります。

この技術的な障害と概念的な問題を分離して解決するために、最近では四次元時空の代わりに二次元や三次元の時空での量子重力の研究が進められています。二・三次元ではくりこみが適用できる重力理論が存在するので、技術的な障害に妨げられることなく、一般相対論の量子化に関わる概念的問題の考察ができるのです。特に二次元の量子重力理論については、ここ数年の研究でその構造がかなり明らかになってきました。今回は触れることはできませんでしたが、二次元の量子重力は素粒子のスーパーstring模型と密接な関係があります。また量子重力やスーパーstringの研究の過程で代数幾何や整数論など、数学の思いもかけない分野とのつながりも現れてきました。素粒子物理学の研究は現代数学の成果を取り入れて進歩するとともに、ニュートン力学がそうであったように、数学の新しい展望を開くことになるかもしれません。

(おおぐり ひろし、京都大学数理解析研究所助教授)