◆◆◆解説◆◆◆

トポロジカルな弦理論とその応用

大栗博司 〈カリフォルニア工科大学 California Institute of Technology, Pasadena, CA 91125, USA e-mail: ooguri@theory.caltech.edu〉

トポロジカルな弦理論はそもそも「おもちゃの弦模型」として考え出されたが，その後筆者らのグループはこの理論が素粒子の統一理論としての超弦理論の計算に直接利用できることを明らかにした．この記事ではブラックホールの量子状態や4次元のゲージ理論の強結合問題といった素粒子物理学理論の重要な課題にトポロジカルな弦理論がどのように応用されているかを解説する．

1. はじめに

理論物理学の歴史の中で「おもちゃの模型」は重要な役割を果たしてきた．場の量子論では2次元のsine-Gordon模型やWess–Zumino–Witten模型などの可解模型がその例として挙げられる．こうした模型は，現実の問題への直接的な応用を目指すのではなく，むしろ理論の構造についての数学的な理解を高め，一般的な教訓を引き出すことを目的とする．トポロジカルな弦理論もまた弦理論の一般的性質を理解するための簡単化された「おもちゃの弦模型」として考え出された．

筆者らのグループは1993年に，トポロジカルな弦理論が「おもちゃの模型」にとどまらず，素粒子の統一理論としての超弦理論の厳密計算に直接利用できることを示した．[1] 以来12年の間にトポロジカルな弦理論の応用範囲は大きく広がり，超弦理論の4次元低エネルギー有効理論の導出をはじめとして，超対称ゲージ理論の厳密解，ゲージ理論と重力理論の双対性の理解，また最近ではブラックホールの量子状態の分析などに力を振るっている．この記事では理論物理学の様々な問題に対するトポロジカルな弦理論の応用について解説する．

トポロジカルな弦理論の解説に入る前に，超弦理論研究の現状について反省してみたい．超弦理論は (1) 重力を含む量子理論であり (2) 素粒子の標準理論を構成するために必要なすべての要素を含んでいる．一つの理論がこの二つの性質を持つことがいかに奇跡的であるかをまず力説したい．

物理学的世界には各々の距離のスケールに特有の法則があり，ある距離に当てはまる法則はより短い距離の法則から演繹される低エネルギー有効理論であると考えられている．このため物理学の基本法則の探求は，短距離すなわち高エネルギーのフロンティアーの開拓を目指す．(初期宇宙の研究も，より短い「距離＝宇宙創生からの時間」の探索といえる．) 自然界のこのような階層構造が物理学者にとって僥倖であったことは言うまでもない．もし水素原子のエネルギー準位の理解にクォーク間の強い相互作用の詳細な知識が必要であったなら，ボーアやハイゼンベルグが量子力学を発見することははるかに困難であったであろうと思われる．

ところが重力理論では距離を定める時空の計量場自身が力学変数なので，距離のスケールをあらかじめ設定してから重力を量子化することはできない．したがって重力と量子力学を統合する理論はどのような短距離の現象も一気に記述できるものでなければならない．すなわち自然界の階層構造は量子重力で打ち止めになると考えられている．実際，プランクエネルギー（量子重力に特有のエネルギースケール）に届く加速器を作ったらどうなるかという思考実験を行ってみると，かなり一般的な仮定の下で，衝突エネルギーがこのスケールを超えるあたりでブラックホールができて，それより短距離の領域は事象の地平に隠されてしまうことを示すことができる．量子力学が位置と運動量を同時に測定することを原理的に不可能にしてしまったように，量子重力はプランクスケール以下の距離の測定を不可能にする．このように重力を含む統一理論の構成は自然界の短距離フロンティアの終焉を意味するので，そのような理論の候補が一つでも存在することは驚きに値する．

超弦理論が素粒子論研究の主流の一つとなったのは，この理論が素粒子の標準理論を構成するために必要なすべての要素を含んでいることがわかったからである．アインシュタインの一般相対性理論が任意の次元で意味を持つのに対し，超弦理論では（摂動展開の範囲では）理論の整合性から時空が10次元に限られる．これが我々が日常的に経験する4次元でなかったことは必ずしも不運なことではない．超弦理論には時空がコンパクトな6次元空間と4次元のミンコフスキー空間の積となる真空解 (6+4=10) があって，超弦理論が素粒子の統一理論になるためにはこの隠された6次元が本質的な役割を果たす．たとえば，クォークやレプトンといった物質場，それらの間のゲージ相互作用，またこのゲージ対称性を破るためのヒッグス機構などを含む素粒子の標準模型の豊富な内容は，超弦理論では6次元の幾何学的構造から生み出されるのである．

そこでより野心的に標準理論の持つ18個（ニュートリノの質量を含めると25個）のパラメータを超弦理論から演繹できないかという目標が生じる．これを野心的と呼んだのは，低エネルギー有効理論をきちんと導き出すことは物理学のこれまでの階層でも難しい問題であったからである．たとえば，QCDからハドロンの低エネルギー現象を定量的に導くことは格子ゲージ理論の数値計算に頼らない限りは困難で，特にクォーク閉じ込めの解析的理解は長年の課

題である．同様のことはナビエ・ストークス方程式の大域解についても言える．[*1] これらは依然として今日的な課題であり，この二つがクレイ数学研究所のミレニアム問題(http://www.claymath.org/millennium) に取り上げられたことはこれらの本質的な理解が新しい数学を必要とすると期待されていることを示している．

もちろん QCD にはその特有なエネルギースケールにおける定量的な予言とそれらの実験による検証があり，それがゆえに私たちは QCD が正しい理論であると確信している．超弦理論についてもそれに特有なエネルギースケールでは様々な予言ができる．しかし，このエネルギースケールがあまりに高いので現在の実験・観測ではこれらの予言の検証ができないでいる．[*2] そのため，自然界が超弦理論を採用しているかどうか判断するためにも，その低エネルギー理論の理解がとりわけ重要な課題となるのである．

QCD と同様に，超弦理論の低エネルギー現象を理解するには強結合の物理を理解する必要がある．この記事では，トポロジカルな弦理論によって超弦理論の様々な強結合問題がどのように克服されてきたか，またそれが低エネルギー有効理論の理解にどのように役立っているのかを解説する．またトポロジカルな弦理論の見地から，弦の非摂動論的定式化についても展望したい．興味のある読者のためにいくらか掘り下げて解説している部分もあるので，最初に読まれるときには技術的に思われる部分は読み飛ばされてもよいかもしれない．トポロジカルな弦理論という一見数学的に思われるかもしれない話題が，超弦理論，また広くは素粒子論の主要な潮流として研究が進んでいることを感じ取っていただければ幸いです．

2. ブラックホールのエントロピー

この節では，トポロジカルな弦理論の応用の例として，最近の話題であるブラックホールのエントロピーの計算を紹介する．ブラックホールに熱力学的性質があることは，Bekenstein によってアインシュタイン方程式の古典解の数学的性質から予想された．これによると，巨視的なブラックホールは事象の地平の面積 A に比例するエントロピー S を持つ．

$$S=c_0A\,. \tag{1}$$

一般に A はブラックホールの質量 M の単調増加関数 $\partial A/\partial M>0$ であるから，質量をエネルギーと解釈して通常の熱力学的公式を用いると，温度 T を定義することができる．[*3]

$$\frac{1}{T}=\frac{\partial S}{\partial M}=c_0\frac{\partial A}{\partial M}\,. \tag{2}$$

Hawking は1974年に，量子重力の半古典近似からブラックホールが黒体輻射をすることを発見した．そして上の公式で定数 c_0 を 1/4 とおいたものが，このブラックホール時空の温度と一致することを示した．そこで $S=A/4$ は Bekenstein–Hawking (BH) のエントロピー公式と呼ばれている．[2)]

Hawking 輻射によってブラックホールは徐々にそのエネルギーを失う．ブラックホールが球対称で電荷・磁荷を持たない場合には温度 T は一様に上昇し，[*4] 爆発的な終末 $T\to\infty$ を迎えると考えられている．しかし輻射によって質量が小さくなってくるとブラックホールの近くでの時空の曲率が大きくなるので，量子重力効果が無視できなくなる．一般に量子重力の効果は計量テンソルについての高階微分項（たとえば曲率テンソルについて高次のべきを持つ項）として現れる．そして曲率が大きくなると高階微分項が無視できなくなるのである．

ブラックホールに電荷 e や磁荷 m を与えると情況は異なってくる．この場合にはブラックホールの質量に下限 $M(e,m)$ がある．そして質量がこの下限と一致する極限で温度 T は 0 となり，このようなブラックホールは安定である．これを極限ブラックホールと呼ぶ．電磁荷を十分大きくとることで，$M(e,m)$ を大きく，したがってブラックホールの近傍での時空の曲率を小さく保つことができる．このように質量の大きいブラックホールについては BH 公式 $S=A/4$ への量子補正は無視できるので，エントロピーについて通常の統計力学的解釈が成り立つとすると，極限ブラックホールは $\exp(A/4)$ 個の量子状態からなっていると解釈される．これを量子状態の数え上げから再現できるかどうかは量子重力理論の試金石の一つとされてきた．超弦理論がこのチャレンジにどのように応えたかを振り返ってみよう．

超弦理論には極限ブラックホールが様々な形で現れる．超弦理論は10次元の時空間に定義されているので，この10次元が4次元のミンコフスキー時空と6次元の Calabi–Yau 空間[*5]の積になっているとする．このようにして得られた4次元理論における荷電ブラックホールの多くは D ブレーンを使って構成することができる．

話を具体的にするために輪のように閉じた弦からなる II 型の超弦理論に限って考えることにして，その場合に D ブ

[*1] 流体力学からの例としては，ボルツマン方程式の粗視化によるナビエ・ストークス方程式の導出も挙げられる．

[*2] 超弦理論の真空解の選び方によってはこのエネルギースケールが比較的低くなり，次世代の加速器実験で超弦理論に特有な量子重力効果が観測されたり，また宇宙初期に生成された巨視的な弦からの重力波が検出される可能性が指摘されている．

[*3] 以下では，光速，プランク定数，プランク質量，ボルツマン定数をすべて 1 とする単位系を使う．

[*4] 質量が小さくなるにつれて温度が上昇するということは，このようなブラックホールは負の比熱を持ち，熱力学的に不安定であるということを意味する．

[*5] 一般に計量を持つ空間では，リーマンの曲率テンソルは接空間の微小回転を与える．6次元空間の場合には，微小回転の全体 $so(6)$ はリー環として $su(4)$ と同じであるので，$su(3)$ を部分環として持つ．この $su(3)$ 部分環を一つ定めたときに，リーマンテンソルが常に同じ $su(3)$ 部分環に含まれるようになっている空間のことを「Calabi–Yau 空間」と呼ぶ．このような空間は弦の運動方程式の解となっており，その幾何学的構造は 4 次元理論の構成に本質的な役割を果たす．

レーンについて簡単な説明をしよう.[*6] Dブレーンを定義するには，まず10次元時空の部分空間を指定する. II型の超弦理論は閉じた弦のみからなっているが，Dブレーンがあると閉じた弦が開くことができて，その開いた弦の端点はDブレーンの指定する10次元時空の部分空間の上を走ることができると考える. Dブレーンは弦のように時空の中で振動することができ，その振動の自由度はDブレーン上に端点を持つ開いた弦が担っている. Dブレーンには様々な次元のものがあり，空間p次元と時間1次元方向に伸びているものをDpブレーンと呼ぶ. 特に弦のように空間1次元に伸びているものはD1ブレーンであり，膜のように2次元的に拡がったものはD2ブレーンである. Dブレーンについての日本語による解説としては文献3をお薦めする.

6次元のCalabi–Yau空間の中にp次元の部分空間があるときに，Dpブレーンをこの部分空間に巻きつけてやると，4次元時空では拡がりのない点粒子となる. この粒子はp次元部分空間の体積に比例する質量Mとこの部分空間のホモロジーによって指定される電磁荷e, mを持つ.（Dブレーンが同じ部分空間に何度も巻きついているときには，質量や電磁荷は部分空間の体積やホモロジーに巻きつき数をかけたものになる.）この粒子の質量は，荷電ブラックホールの質量と同じ不等式$M \geq M(e, m)$を満たし，部分空間の体積が極小となるときに$M = M(e, m)$となる. このようなDブレーンが極限ブラックホールと同一であるというのがDブレーン構成法の基本的仮定である. この仮定の正当性はDブレーンによってブラックホールの様々な性質が再現されるということよって検証されてきた.

ブラックホールの固有な自由度はDブレーン上に端点を持つ開いた弦によって与えられる. 特に極限ブラックホールのような基底状態については，開いた弦の低エネルギー有効理論であるゲージ理論による記述が正確な答えを与える場合が多い. StromingerとVafaは1996年にこのようなゲージ理論を使って極限ブラックホールの微視的量子状態を数え上げ，さらにブラックホールの質量が大きくなる極限でこれがBHのエントロピー公式を再現することを示した.[4] これは超弦理論が重力理論の量子化に成功しているという強力な証拠となった. この計算とその意義の日本語による解説としては文献5をお薦めする.

これまで述べてきたように，BHのエントロピー公式はブラックホールの質量が大きく量子補正が無視できるときに成り立つ. ブラックホールが小さくなると，ブラックホールの近くで時空の曲率が大きくなり，BH公式は量子補正を受ける. 一方，Dブレーン構成法は原理的にはどのような大きさのブラックホールについても適用できる. ブラックホールとDブレーンとの対応関係は，AdS/CFT対応をはじめとする近年の超弦理論の発展の基礎であり，超弦理論やゲージ理論のさらなる進歩に重要な役割を果たすと考えられている. そのため，小さいブラックホールに関してBH公式の量子補正を計算し，ゲージ理論との対応を精密化することは，超弦理論の重要な課題であるとされてきた.

BH公式への補正の目安として，二つの重要なスケールがある. 一つは「プランクの長さ」l_Pであり，ニュートン定数を光速・プランク定数と組み合わせて得られる長さである. この記事ではこれを1とおく自然単位系を使っている. プランクの長さより短い距離では量子重力効果が重要になり，時空の概念が本質的に変更を受けると考えられている. もう一つは「弦の長さ」l_sであり，これは超弦の張力定数を光速・プランク定数と組み合わせて得られる. 弦の長さは弦がどのくらい拡がっているのかの目安と考えることができ，点粒子を基本的な自由度とする通常の場の量子論と弦理論との違いが顕著になる距離である. したがって，ブラックホールの事象の地平の面積がl_P^2やl_s^2に近くなると，量子重力や弦理論に特有の効果が重要になると考えられる.

弦の長さl_sのスケールで起きる補正を評価するためには，ブラックホールの時空の中での弦の伝播の方程式を解かねばならず，またプランクの長さl_Pのスケールの補正を計算するためには弦の摂動展開の足し上げが必要になる. 一般的には，このような計算は現在の超弦理論の技術水準を超えている. しかしこの数年の間にBHのエントロピー公式についてはトポロジカルな弦理論を使うことで両方のタイプの補正について厳密で明示的な解答が得られることがわかったのである.

1993年に筆者はBershadsky, Cecotti, Vafaとの共同研究によって，超弦理論から求められる4次元有効理論のラグランジアンの中で特に「プレポテンシャル」と呼ばれる関数によって指定される項については，トポロジカルな弦理論を使うと摂動展開のすべての次数で厳密に計算ができることを示した.[1] プレポテンシャルは，超弦理論の4次元の低エネルギー理論の理解に重要な役割を果たす. 特に，1998年にCardoso, de Wit, Mohauptは，ある仮定の下で，BHエントロピーの量子補正の計算に必要なのはプレポテンシャルのみであることを指摘した.[6] すなわち荷電ブラックホールの基底状態のエントロピーについては，その量子補正の全貌がトポロジカルな弦理論によって決定できると主張したのである.

これを受けて，筆者はStrominger, Vafaとともに文献6のエントロピー公式を分析・整理し，2004年に次のような予想を得るに至った.[7] すなわち，$\Omega(e, m)$を電荷e，磁荷mを持つブラックホールの基底状態の量子縮退度とすると，摂動展開のすべての次数にわたってΩとトポロジカルな弦理論の分配関数$Z_{\rm top}$がラプラス変換，

[*6] DブレーンのDは19世紀の数学者Lejeune Dirichletの頭文字であり，開いた弦の端点の境界条件がDブレーンと直交する方向にはDirichlet型になっていることに由来している. ブレーンは，2次元の膜のことであるMembraneのbraneから取られた.

$$|Z_{\rm top}|^2=\sum_e \Omega(e,m)e^{-e\phi} \tag{3}$$

によって関係づいていると主張したのである．分配関数 $Z_{\rm top}$ の定義は次の節で与えるが，これは超弦理論を4次元にコンパクト化するためのCalabi–Yau空間の幾何学的構造とトポロジカルな弦理論の結合定数に依存しており，上の公式が成り立つためには，左辺の $Z_{\rm top}$ に含まれるこれらの情報は，右辺で指定されている磁荷 m と電荷ポテンシャル ϕ の簡単な関数として表される．この公式についてはこの1年の間に様々な検証がなされ，右辺と左辺が独立に計算できる例についてこの公式が摂動展開のすべての次数で成り立っていることが確認されている．

この公式の意義については，次節でトポロジカルな弦理論の定義を与えた後で議論することにしよう．

3. トポロジカルな弦理論

点粒子を基本的な自由度とする通常の場の量子論では，ファインマン図によって量子補正の計算を視覚化することができる．場の量子論のファインマン図は粒子の伝播を表す線分を相互作用点でつなぎ合わせたものである．弦理論では，弦の軌跡が時空の中で2次元の面を形作るので，この2次元の世界面を場の理論のファインマン図に対応するものと考える．弦理論の量子補正を求めるには，まずこのような2次元の世界面の上の場の量子論の振幅を計算し，それをさらにすべての可能な世界面について足し上げることになる．この解説では輪のように閉じた弦からなるII型の超弦理論を考える．この場合，世界面は境界のない閉じた面であり，そのトポロジーは種数すなわち面の持つハンドルの数である g によって分類される（g は種数を意味するgenusの頭文字である）．たとえば，$g=1$ の世界面は閉じた弦が真空から対生成されその後対消滅するというプロセスを記述している（図1参照）．一般に世界面の種数 g は摂動展開の次数に対応する．

ここで考えている世界面上の場の量子論とは次のようなものである．2次元の世界面が時空間の中でゴム膜のように振動するというのが弦理論の直感的な描像なので，これを数学的に定式化するため世界面から10次元の時空間への写像 X を考え，これを世界面上の場の自由度と考える．写像 X は世界面の時空間の中での配位を指定するので，その面積を計算することができる．この面積は南部・後藤の作用と呼ばれる X の汎関数であり，弦の作用汎関数の基本的な部分となる．（作用が面積に比例しているということは，弦が完全弾性体であることを意味している．）超弦理論では，この作用にフェルミオンを含んだ項を加えて全体が超対称性を持つようにする．

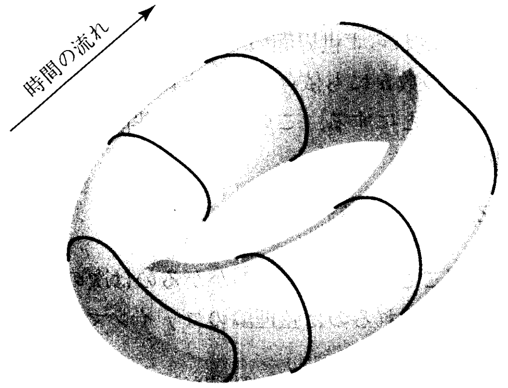

図1 閉じた弦が真空から対生成されその後対消滅する軌跡を時間の流れに沿ってたどると，種数 $g=1$ の世界面が現れる．

さて，超弦理論から4次元の有効理論を導くために，10次元の時空間が4次元のミンコフスキー時空と6次元のCalabi–Yau空間の積になっているとする．Calabi–Yauが曲がった空間であることは，世界面上の場の量子論が非線形な相互作用項を持つことを意味する．超弦理論の計算をするためには，このような場の量子論の振幅を計算した上で，さらにそれを世界面のパラメータ空間（モジュライ空間）の上で積分する必要がある．そもそもCalabi–Yau空間の計量テンソルの具体形すら知られていないので，このような計算は一般には困難といえる．

Wittenは1988年に超弦理論を簡単化した模型としてトポロジカルな弦理論を考えた．[9] この「おもちゃの模型」が超弦理論の摂動計算の練習問題になると考えたのである．トポロジカルな弦理論を定義するには，まず4次元ミンコフスキー時空の中での弦の運動を無視して，6次元のCalabi–Yau空間の中での弦の配位にのみ注目する．このように簡単化した理論にさらに「トポロジカルなひねり」と呼ばれる数学的な魔法をかけると，弦の振動の効果が相殺されて，弦の世界面の大域的な配位だけが重要になる．そして，世界面上の場の理論は本質的に有限自由度のシステムに簡単化する．この「ひねり」を入れた弦理論を「トポロジカルな弦理論」と呼ぶのである．トポロジカルな弦理論の教科書としては文献10をお薦めする．

Calabi–Yau空間はいくつかの幾何学的変形（たとえば体積を増減するとか，複素構造を変えるとかの）の自由度を持ち，そのパラメータの空間の構造は数学的によく理解されている．これをCalabi–Yauのモジュライ空間と呼ぶ．世界面の上の場の理論の振幅は，Calabi–Yauのモジュライと世界面のモジュライの両方の関数と考えることができる．このような場の理論の振幅を種数 g の世界面のモジュライ空間の上で積分したものが，トポロジカルな弦理論の g ループ振幅 F_g であり，これはCalabi–Yauのモジュライのみの関数となる．筆者らは1993年の論文[1]で，F_g がCalabi–Yauのモジュライ空間上で微分方程式を満たすことを示した．「正則アノマリー方程式」として知られるこの微分方程式は，種数 g についての漸化式の形を取る．したがって $g=0$ すなわち古典極限の振幅を知っていると（これは既知の幾何学的方法で求めることができる），F_g を g について逐次に計算していくことができる．トポロジカルな弦理論の振幅を計算する技術はここ数年の間に急速に進歩したが，

4次元の物理への応用に必要なコンパクトなCalabi–Yau空間の場合には正則アノマリー方程式以外にはまだ系統的な手法は存在しておらず，この方面の今後の発展が望まれている．

このようにトポロジカルな弦の摂動論は数学的によく整備された理論になりつつある．それだけでは超弦理論を簡単化した「おもちゃの模型」で終わってしまうところであるが，この理論のさらに重要な点は超弦の4次元有効理論の計算に直接利用できるというところにある．前節で述べたように，トポロジカルな弦理論を使うと4次元有効ラグランジアンのプレポテンシャルを完全に決定でき，特にブラックホールの量子状態数 $\Omega(e,m)$ について予想 (3) が成り立つと考えられている．[7] ここでトポロジカルな弦理論の分配関数は F_g と弦の結合定数 λ によって

$$Z_{\rm top}=\exp\left(\sum_{g=0}^{\infty}F_g\lambda^{2g-2}\right) \tag{4}$$

と定義されるので，(3) を

$$\left|\exp\left(\sum_{g=0}^{\infty}F_g\lambda^{2g-2}\right)\right|^2=\sum_{e}\Omega(e,m){\rm e}^{-e\phi} \tag{5}$$

と表すことができる．この記事では解説する紙面がないが，この公式はブラックホールの対応原理や事象の地平の量子力学的安定性について重要な知見をもたらしつつある．

予想 (5) はトポロジカルな弦理論の非摂動論的な定義を与えているとみなすこともできる．一般に摂動展開 $\sum_g F_g\lambda^{2g-2}$ は発散級数であり，そのままでは理論の定義とは言えない．通常の場の量子論にはラグランジアンがあって，形式的には汎関数積分，もっと厳密には格子上の統計模型の連続極限として定義することができる．弦理論では一般にラグランジアンに対応するものは知られていないので，摂動展開を超えて理論が定義されているのかどうかは重要な問題である．今の場合には，ブラックホールの状態数 $\Omega(e,m)$ はDブレーン上のゲージ理論によって厳密に定義できるので，(5) の右辺を左辺の弦理論振幅の定義とすることができる．これは，AdS/CFT対応が共形不変なゲージ理論によってAnti–de Sitter空間上の弦理論の「定義」を与えるという事実の特殊な場合とも言える．*7

4. Dブレーンとゲージ理論

前節では輪のように閉じたトポロジカルな弦理論を考え，それがブラックホールのエントロピーの計算に役立つことを見た．このような超弦理論とトポロジカルな弦理論の関係は，Dブレーンがあっても成り立つことが知られている．[1] 超弦理論ではDブレーンを導入すると開いた弦が現れて，Dブレーンの上の低エネルギー有効理論はゲージ理論で記述される．一方，トポロジカルな弦理論でもDブレーンを考えることができる．以下に見るように後者は行列模型などの手法を使って厳密に解くことができるので，これを超弦理論に応用して様々なゲージ理論の強結合現象について知見を深めることができる．

4.1 ’t Hooft極限とゲージ理論のスーパーポテンシャル

これまでのように10次元時空を6次元のCalabi–Yau空間と4次元のミンコフスキー空間の積として，そこにいくつかのD$(p+3)$ブレーン（空間的には $p+3$ 次元，時間的には1次元に拡がったブレーン）を置いてみよう．ここで，ブレーンはCalabi–Yau空間のなかの p 次元の部分空間に巻きついているものとし，残りの3+1次元は4次元ミンコフスキー空間を充満しているとする．Calabi–Yauの部分空間をうまく取ると，4次元の低エネルギー有効理論は $\mathcal{N}=1$ の超対称性（最低限の超対称性）を持ったゲージ理論となる．このゲージ理論はゲージ場とその超対称パートナーであるグルイーノ場を持ち，ゲージ群は $U(n)$，ただし n はDブレーンの枚数である．またゲージ場のほかに4次元のスピノール場とスカラー場からなる「物質場」が現れる場合もあるが，どのような物質場が現れてそれらがどのように相互作用するのかはCalabi–Yau空間とその部分空間の選び方に依存している．このゲージ理論の強結合物理現象を理解する上で鍵になるものの一つに，グルーボール場と呼ばれるグルイーノ ψ の複合場 $S=\psi\psi$ の有効スーパーポテンシャル $W(S)$ がある．トポロジカルな弦理論はこの有効スーパーポテンシャルを決定する．

対応するトポロジカルな弦理論では，同じ p 次元の部分空間にDブレーンを N 枚置くことにする．（この N は，超弦理論のDブレーンの枚数 n とは異なる．N と n とを独立にとる理由は，以下の対応関係で明らかになる．）Dブレーンがあるとトポロジカルな弦理論は開いた弦を含み，その端点はDブレーンの上を走る．すなわち弦の世界面は境界を持つことが許され，ただし境界はDブレーンに密着していなければならない．この場合弦理論の振幅は面の種数 g（これは相変わらず世界面のハンドルの数をかぞえる）のほかに境界の数 h にも依存することになる．*8 この振幅を $F_{g,h}$ と書くことにする．この場合分配関数 $Z_{\rm open}$ は次のように展開できる．

$$\ln Z_{\rm open}=\sum_{g,h}F_{g,h}\lambda^{2g-2}(\lambda N)^h\,. \tag{6}$$

ここで境界ごとに λN の重みがかかるのは次の理由による．結合定数 λ が現れるのは弦理論のファインマン則に由来し

*7 ここでAdS/CFT対応について少しでも説明したいところであるが，残念ながら紙面が足りない．興味のある方は文献3をご覧ください．AdS/CFT対応のより技術的な側面についての解説記事としては文献8を挙げる．ここで考えている極限ブラックホールの事象の地平の近くでは，10次元時空間は2次元のAnti–de Sitter空間 (AdS_2)×2次元の球面×Calabi–Yau空間となっており，(5) の左辺はこの10次元時空間の中の超弦理論の分配関数を摂動展開したものとみなすことができる．一方右辺はブラックホールをDブレーンによって構成したときの，Dブレーン上のゲージ理論の分配関数である．したがって (5) は，AdS_2 上の超弦理論とDブレーン上のゲージ理論の等価性を主張していると考えることができる．

*8 h はholeの頭文字である．これは境界があることを世界面に穴が開いていると考えるからであり，この見方は次節の’t Hooft予想の議論で役に立つ．

ており，N は各々の境界が N 枚のDブレーンのどれに密着するかの場合の数を表している．この λN はゲージ理論の 't Hooft 結合定数と呼ばれるもので，次節の議論において重要な役割を果たす．

超弦理論から現れるグルーボール場の有効スーパーポテンシャル W はトポロジカルな弦理論の $g=0$ の振幅 $F_{0,h}$ を使って

$$W(S)=n\frac{\partial}{\partial S}\sum_h F_{0,h}S^h \tag{7}$$

で与えられる.[1),*9] これを，トポロジカルな弦理論の分配関数の定義 (6) と組み合わせると，

$$W(S)=n\frac{\partial}{\partial S}\lim_{\lambda\to 0}\lambda^2\ln Z_{\text{open}}(\lambda,\lambda N=S) \tag{8}$$

と書くこともできる．ここで $\lambda\to 0$ 極限は $g=0$ の項を取り出すための操作である．特に重要なのは，トポロジカルな弦理論の 't Hooft 結合定数 λN が4次元のグルーボール場 S と同一視されている点である．右辺では，$\lambda N=S$ の値を有限に保ちながら $\lambda\to 0$ の極限ととっているので，$N\to\infty$ とする必要がある．このような極限のとり方を 't Hooft の N 無限大極限と呼ぶ．一方，4次元ゲージ群 $U(n)$ のランク n は，N とは異なり，有限のままにおいていることに注意していただきたい．超弦理論のDブレーンの数 n と対応するトポロジカルなDブレーンの数 N とを独立にとったのはこのためである．標語的にまとめると，「Dブレーン上のトポロジカルな弦の分配関数の N 無限大の極限は，4次元の超対称ゲージ理論の有効スーパーポテンシャルを与える」と言える．

4.2 開いた弦の場の量子論

これまでは，弦理論の摂動振幅を計算するにあたり，世界面の上の場の量子論を考え，さらにその振幅を世界面のモジュライ空間の上で積分するという，いわゆる第一量子化に基づいた方法で解説してきた．この場合，世界面は弦のファインマン図形と見なすことができる．ところで，通常の場の量子論では場を力学変数とするラグランジアンがあり，ファインマン図形は場の量子化から導かれる2次的な概念である．そこで弦理論についても「弦の場」とそのラグランジアンを使った定式化を探るのは自然である．通常の場が時空の点の関数であるのに対し，「弦の場」は時空間の中の弦の配位の汎関数であり，技術的難易度は格段に高い．開いた弦については摂動展開を正しく再現する場の理論が知られており，Dブレーンの対消滅の解析などで成功を収めている．この方面の最近の進歩については，日本語による解説[11)]をお薦めする．

トポロジカルな弦理論は有限自由度の系なので，場の理論による定式化に適している．特に開いた弦の場合には，弦の場の量子論は Chern–Simons ゲージ理論や行列模型など，数理物理学でよく知られた低次元可解模型になる.[*10] これらを弦の場の理論の「おもちゃの模型」としてとらえて，弦理論の場の理論についての一般的な教訓を学ぶ実験室として使うことも有益である．これについては6節で議論することにして，ここでは，トポロジカルな弦理論と超弦理論との関係 (8) を使うと，4次元の超対称ゲージ理論の有効スーパーポテンシャルがこれら低次元可解模型によって計算できるという強力な主張が得られることに注目しよう．

4.2.1 Chern–Simons ゲージ理論

「トポロジカルな弦の場の理論」をはじめに考えたのは Witten である.[12)] 彼は，Calabi–Yau 空間の中の3次元の部分空間を覆うDブレーンを考えると，その上の開いたトポロジカルな弦理論が3次元の Chern–Simons ゲージ理論と等価であることを示した．Chern–Simons 理論の作用 I_{CS} は次のように簡単なものである：

$$I_{\text{CS}}=\frac{1}{\lambda}\int \mathrm{Tr}\left(A\mathrm{d}A+\frac{2}{3}A^3\right). \tag{9}$$

ここで，A は $U(N)$ 群についてのゲージ場，ゲージ群のランク N はDブレーンの数，Tr は群の表現空間上の跡であり，また λ は弦理論の結合定数である．（正確には，上の作用はトポロジカルな弦の世界面上のインスタントン効果によって変形を受ける場合もある．）

Chern–Simons 理論の分配関数は様々な3次元空間について厳密に計算できるので，それがトポロジカルな弦理論の分配関数 Z_{open} と同じであるとして (8) をあてはめると，対応する4次元のゲージ理論の有効ポテンシャルを求めることができる．たとえば，3次元空間が球面のときには Chern–Simons 理論の計算は

$$W(S)=n\sum_{m=-\infty}^{\infty}(S+im)\ln(S+im)$$

を与える．特に $m=0$ の項は，グルイーノの真空凝縮など，4次元ゲージ理論の強結合物理を理解する上で基本的に重要な Veneziano–Yankielowicz のスーパーポテンシャル

$$W_{\text{VY}}(S)=nS\ln S \tag{10}$$

を再現している.[16)]

4.2.2 行列模型

Dijkgraaf と Vafa は，特にDブレーンが2次元球面を覆っているときには，開いたトポロジカルな弦の場の量子論が行列模型となることを示した.[13)] これを (8) と組み合わせると，行列模型の N 無限大の極限が4次元ゲージ理論の有効スーパーポテンシャルを与えるという強力な主張が導かれる．

最も簡単な例として，Calabi–Yau 空間の中に一つの2次

---

*9 種数 g が0より大きい場合の $F_{g,h}$ はゲージ場と超重力場との相互作用項を計算する．

*10 閉じた弦理論についても小平–Spencer 理論を場の理論として使うことが提案されており，摂動の0次と1次では正しい答えを与えることが知られている.[1)] 小平–Spencer 理論の量子化は数学的に深い内容を持ち，摂動展開の高次の項の構造は Kontsevich らによって解明されつつある．

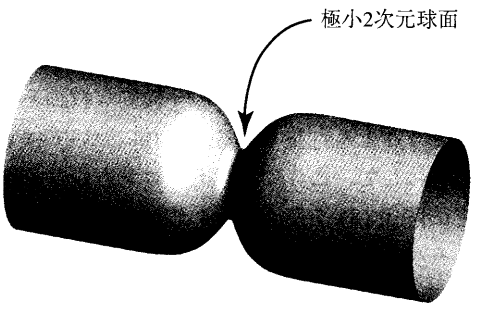

図2 Calabi–Yau 空間の中に2次元の極小球面がある様子を，次元を落として表してみた．

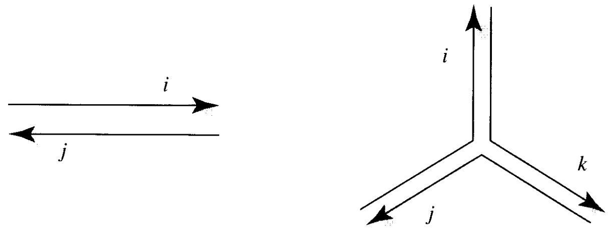

図3 ゲージ群の随伴表現に従う粒子（ゲージ場自身を含む）の伝播は矢印の対で表すのが自然である．またこれらの粒子のゲージ不変な相互作用は二重線の組み換えとして表される．このとき各々の矢印は基本表現を表し，添え字 $i, j, k=1, \cdots, N$ を伴っている．

元の球面が孤立してトポロジカルに安定に存在している場合を考えてみよう．(6次元の Calabi–Yau 空間とその中の2次元球面を視覚化するのは難しいので，イメージをつかむために2次元の筒を考え，その一部を絞ったものを想像してみよう（図2）．このとき筒の表面全体を Calabi–Yau 空間にたとえると，一番くびれたところにある円周が問題の2次元球面の類似となる．[*11]）この2次元球面を N 個の D ブレーンで覆うと，その上の開いたトポロジカルな弦の場の理論はガウシアン行列模型となる．これは $N\times N$ のエルミート行列 M を変数とし，その作用は

$$I_{\mathrm{matrix}}=\frac{1}{\lambda}\operatorname{Tr} M^2$$

で与えられる．Chern–Simons 理論の場合のように，λ はトポロジカルな弦理論の結合定数である．ガウシアン模型は一見トリビアルのように思われるが，行列の積分測度のために，その分配関数 Z は M のランク N に依存して，

$$Z_{\mathrm{open}}=\int [\mathrm{d}M] \exp(-I_{\mathrm{matrix}})=(N-1)!(N-2)!\cdots 3!2!1! \tag{11}$$

となる．弦の結合定数 λ は行列 M の積分の変数変換に吸収することができるので，分配関数 Z_{open} は N のみに依存するのである．この場合対応する4次元のゲージ理論はゲージ場とその超対称対のグルイーノ場のみからなる純粋な（物質場を含まない）超対称ヤン・ミルズ理論である．ここで，トポロジカルな弦理論の分配関数とゲージ理論の有効ポテンシャルを関係づける公式 (8) を使うと，この $U(n)$ ゲージ群を持つ超対称ヤン・ミルズ理論の有効ポテンシャルが

$$W(S)=n\frac{\partial}{\partial S}\lim_{\lambda\to 0}\lambda^2 \ln Z_{\mathrm{open}}(N=S/\lambda)=nS\ln S$$

と導かれる．またしても，ゲージ理論の Veneziano–Yankielowicz スーパーポテンシャル (10) が正しく再現された．

Calabi–Yau 空間やその部分空間を変えることでより複雑なゲージ理論を構成することもできる．この場合に対応する行列理論は，一般の多項式を使ったポテンシャル $\operatorname{Tr} V(M)$ を持ったり，またより一般にはいくつもの行列がからみ合ったものになる．

5. 't Hooft の夢

't Hooft は今から30年以上前に，$U(N)$ ゲージ理論のすべての場がゲージ群の随伴表現に従うときには，その量子振幅を N の関数として $1/N$ について漸近展開をすると展開の各項が閉じた弦理論の摂動振幅で与えられるであろうと予想した．[14), *12]

この予想は，次のようなファインマン図形の組み合わせ論的分析に基づいている．まず，随伴表現に従う粒子の伝播を図3の左のように矢印の対で表すことにする．$U(N)$ 群の随伴表現は基本表現とその複素共役の積になっているので，各々の矢印を基本表現とみなすことができる．基本表現は N 次元なので，各々の矢印は1から N までの添え字を持っていると考える．(随伴表現は N^2 次元なので，基本表現とその複素共役の積として勘定があっている．）この二重線表示の便利な点の一つは，$U(N)$ 群のもとで不変な相互作用を，図3の右のように矢印を自然につなぐことで表現できることである．つながっている矢印は同じ添え字を保っているとする．

簡単のために外線のないいわゆる真空振幅を考えることにしよう．このとき1本の矢印をたどっていくと，外線がないのでいつかは元の点に戻って閉じたループが得られるはずである．これをすべての矢印について繰り返すと，ファインマン図を矢印つきのループの集まりと表すことができる（図4参照）．このようなループの数を h とすると，1から N までの添え字の足し上げによって N^h の係数が得られる．これが，このファインマン図形の N 依存性となる．

次にゲージ結合定数 λ_{YM} についての依存性を考えてみよう．簡単のために，3点相互作用は λ_{YM}，4点相互作用は λ_{YM}^2，一般に n 点相互作用は $\lambda_{\mathrm{YM}}^{n-2}$ に比例しているとしよう．この結合定数をすべての相互作用点について掛け合わせたものは $\lambda_{\mathrm{YM}}^{2p-2v}$ となる．ただし v はファインマン図形の相互作用点の総数，p は相互作用点の間の粒子の伝播を表す線分の総数である．なぜこうなるのかは，読者各自に考えて

*11 正確には，2次元の球面が6次元の Calabi–Yau 空間の中にどのように埋め込まれているのかに選択の余地がある．以下では，いわゆる resolved conifold と呼ばれる状況を考えている．

*12 基本表現の場を含む場合には，対応する弦理論には開いた弦が現れるとされる．

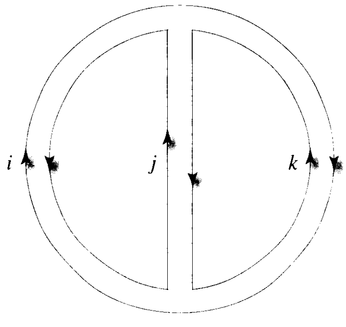

図4　随伴表現のファインマン図は矢印つきループの集まりと表すことができる．この図の場合には $v=2, p=3, h=3$ であり，公式 (13) により $g=0$ となる．したがって，この図に対応する量子振幅は $\lambda_{\rm YM}^2N^3=(\lambda_{\rm YM}^2N)^3\lambda_{\rm YM}^{-4}$ に比例する．三つのループの各々に円盤を張り合わせると2次元球面が得られる．これが，ゲージ理論のファインマン図と弦理論の世界面の large N 対応を表している．

もらうことにしよう．*13

まとめるとゲージ理論の摂動振幅には

$$\lambda_{\rm YM}^{2p-2v}N^h=\lambda_{\rm YM}^{2(-v+p-h)}(\lambda_{\rm YM}^2N)^h \tag{12}$$

という係数がかかることになる．ファインマン図の例として図4を参照されたい．ここで $\lambda_{\rm YM}$ の肩にある $(-v+p-h)$ には次のような意味がある．まず h 個のループの各々について，平坦な円盤を用意して，円盤の端とループとを張り合わせると(つまりループの内側を円盤で埋めると)，ファインマン図形から閉じた2次元の面を構成することができる．このとき，v, p および h はこの閉じた面の単体分割をしたときの頂点，線，面の数なので，$v-p+h$ はこの面のオイラー数，すなわち

$$v-p+h=2-2g \tag{13}$$

と書ける．ここで g はこの面の種数である．したがってゲージ理論の真空振幅 $\mathscr{F}$ を次のように整理することができる．

$$\mathscr{F}=\sum_{g,h}F_{g,h}(\lambda_{\rm YM}^2)^{2g-2}(\lambda_{\rm YM}^2N)^h\,. \tag{14}$$

ここで $F_{g,h}$ は，決まった種数 g とループの数 h を持つファインマン図の効果を足し上げたものである．ここで $\lambda=\lambda_{\rm YM}^2$ とおくと，上の展開式が開いた弦の分配関数の摂動展開 (6) と同じ構造をしていることに注目していただきたい．これは，開いた弦の理論が低エネルギー極限によってゲージ理論と結びついていることからも期待できることである．

さて，'t Hooft 予想を定義するために，任意のパラメータ t について

$$F_g(t)=\sum_h F_{g,h}t^h \tag{15}$$

と書いてみると，ゲージ理論の摂動展開式 (14) は

$$\mathscr{F}=\sum_g F_g(t=\lambda N)\lambda^{2g-2} \tag{16}$$

と表される．これはまさしく閉じた弦理論の真空振幅の摂動展開の形 (4) をしている．そこで 't Hooft は，$F_g(t)$ が何

*13 ヒント：p 個の線分には各々二つの端点があって，各々の端点はどれかの相互作用点に張りついている．

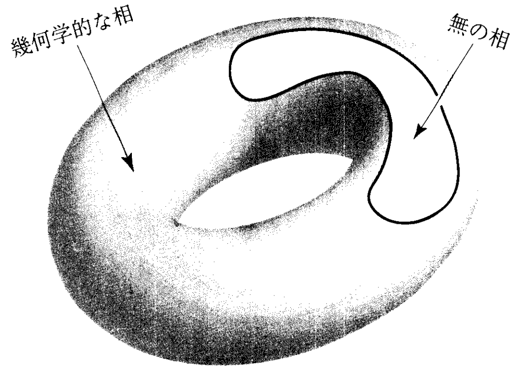

図5　't Hooft 展開を行うと，対応する世界面上の場の量子論は相転移を起こし，世界面は「幾何学的な相」と「無の相」とに分離する．

らかの閉じた弦の g ループ振幅であり，'t Hooft 結合定数 $t=\lambda N$ はその弦理論の世界面上の場の理論のパラメータであると予想した．閉じた弦の摂動展開 (12) では 't Hooft 結合定数を有限に固定して λ について漸近展開している．これは N を大きくとって $1/N$ について展開するのと同じことなので，ゲージ理論と閉じた弦理論との関係は「large N 対応」とも呼ばれる．また閉じた弦理論は重力場の自由度を含んでいるので，これをゲージ場と重力理論との双対性と呼ぶこともある．

't Hooft の予想を証明すること，特に QCD に対応する閉じた弦理論を発見することは，場の量子論を研究するものにとって長年の夢であった．'t Hooft の予想を証明するためには，まず閉じた弦理論とゲージ理論との対を正確に指定しなければならない．超弦理論の進歩によって，ここ10年ほどの間に弦理論＝ゲージ理論の対が数多く予想された．特に Gopakumar と Vafa は，3次元球面上の Chern–Simons ゲージ理論と2次元球面を孤立した部分空間として持つ Calabi–Yau 空間の上の閉じたトポロジカルな弦理論とが，'t Hooft の意味で等価であることを予想した．[15] この場合，Chern–Simons 理論の 't Hooft 結合定数 $t=\lambda N$ は，閉じた弦理論の側では2次元球面の表面積と解釈される．

筆者と Vafa は論文[16]において，この対応関係に基本原理からの説明を与えた．'t Hooft 展開 (15) は t が小さいとしたときの漸近展開なので，世界面上の場の理論が $t\to 0$ でどのように振舞うかを理解する必要がある．閉じた弦理論の側では，t は2次元球面の表面積と解釈されるので，この極限では Calabi–Yau 空間の中の球面が無限小になり，$t=0$ は理論の特異点であると期待される．実際，世界面上の場の理論はこの極限で相転移を起こし，Calabi–Yau 空間の中の弦の運動を記述する相（幾何学的な相）と，Calabi–Yau 空間が無に崩壊してしまう相（無の相）に分離する．図5を参照されたい．筆者らは無の相の経路積分を実行し，その効果を取り入れると，残された幾何学的な相の上の弦理論はまさしく開いた弦理論のように振舞い，'t Hooft 展開 (15) が再現されることを示した．たとえば，図5に示された世界面から無の相の領域を取り除くと，残りの世界面を連続的に変形して図6のファインマン図の形にすること

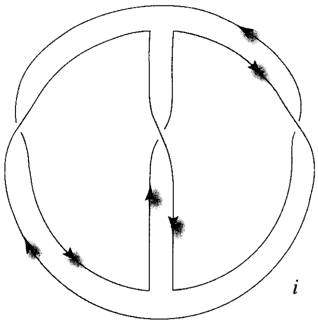

図6　このファインマン図は$v=2, p=3$である点は図4と同じであるが，矢印に沿ってすべての線を一筆書きにかけるので$h=1$であり，したがって公式(13)から$g=1$であることがわかる．一方，図5の世界面から「無の相」を取り除くと，残された2次元面もまた種数$g=1$，境界の数$h=1$を持つ．実際，上の図の二重線をリボンの両端と見なしてファインマン図の全体を境界を持つ2次元面と考えると，これを連続的に変形して図5に描いた世界面の形にすることができる．

ができる．(どのように変形していったらよいか考えてみてください．)

前節で見たように，Chern–Simons理論や行列模型は開いた弦の場の理論と考えることができる．そこで，行列理論についてもlarge N対応があると期待できる．実際この場合には対応する閉じた弦理論は脚注10で触れた小平–Spencer理論になる．'t Hooft結合$t=\lambda N$を有限に保ったまま$N\to\infty$とするためには弦の結合定数λを同時に0とする極限をとらなければならない．したがって't Hooftの意味でのN無限大極限では，行列模型とlarge N対応の関係にある閉じた弦理論は古典極限$\lambda\to 0$にあることになり，このような弦理論の振幅はCalabi–Yau空間の古典的な幾何学を使うことで計算できる．[13] 一方，行列模型のN無限大極限は行列Mの固有値の分布を知ることで解くことができ，そこに深い幾何学的内容があることは古くから知られていた．[17] large N対応はこの固有値の分布の背後にあるのがCalabi–Yau空間の幾何学であり，さらに行列積分の$1/N$展開は小平–Spencer理論の量子化と解釈できることを明らかにしたのである．

これまで見てきたように，トポロジカルな弦理論は超弦理論の計算に役に立つ．そこで，このトポロジカルな弦理論による't Hooft予想の証明をさらに発展させることで，AdS/CFT対応自身の摂動論レベルでの証明が得られるのではないかと期待されている．これはまた，QCDに対応する弦理論を理解することで，QCDの低エネルギー理論を演繹し，特にクォークの閉じ込めの証明を得るという，'t Hooft予想の究極の目的への道を示しているように思われる．これらの点についてさらに解説するには紙面が足りないので，別な機会に譲ることにする．

6.　弦の理論の非摂動論的構成にむけて

弦理論の基本的課題の一つに理論の非摂動論的定義・構成がある．4.2節で見たように開いたトポロジカルな弦理論についてはChern–Simons理論や行列模型といった場の理論的な定式化が存在する．これらは開いた弦の摂動展開を再現するという条件から得られたものである．これらの場の理論は開いた弦の理論の非摂動論的定義になっているのであろうか？　また前節で見たように，開いた弦理論は't Hooft対応によって閉じた弦理論と関係づけることができる．それでは，Chern–Simons理論や行列模型は閉じた弦理論の非摂動論的定義にもなっているのであろうか？

筆者は問題はそれほど簡単ではないと考える．確かに行列模型の摂動展開は弦理論の計算を再現する．しかしそのようなものはほかにも存在するかもしれない．よく引き合いに出される例としては，結合定数λについて$e^{-1/\lambda}$という関数がある．この関数を$\lambda=0+$の周りで漸近展開すると展開の係数はすべて0となる．この例の示すことは，摂動展開を再現するという条件のみでは非摂動論的定義を指定するには弱すぎるということである．したがって，理論を非摂動論的に構成するためにはこのような不定性を物理的要請によって取り除かなければならない．AdS/CFT対応が注目されたのは，一つにはこれが超弦理論の基本的な仮定(特に2節で触れたDブレーンとブラックホールの同一性)から必然的に導かれるものであり，Anti-de Sitter空間という特定の時空に限っては超弦理論のまぎれもない非摂動論的定義を与えていると考えられているからである．実際，超弦理論の非摂動論的現象がAdS/CFT対応で定められるゲージ理論によって正しく記述できることは，様々な例によって確認されている．

振り返って，トポロジカルな弦理論の場合にはChern–Simons/行列模型を非摂動論的定義とする根拠があるのであろうか？　実は，この場合には，これとは全く別な非摂動論的定義が存在する．2節で見たように，閉じたトポロジカルな弦の分配関数$Z_{\rm top}$は摂動論のすべての次数においてブラックホールの基底状態の数$\Omega(e,m)$とラプラス変換によって関係づけられている．この縮退度$\Omega(e,m)$はDブレーン上のゲージ理論を使って厳密に定義できる量である．したがって，トポロジカルな弦理論をこのようなゲージ理論によって定義することも可能なはずである．実際，このようにして定義された理論は，弦の振幅の摂動展開を正しく再現するのみならず，重力のインスタントン効果の計算から定性的に期待されていた非摂動論的現象を定量的に導くことが指摘されている．[18] しかも，脚注7で簡単に触れたように，この定義はAdS/CFT対応の枠組みに自然に当てはまるのである．

ブラックホールのエントロピーを使った定義と，Chern–Simons/行列模型とを比較すると，非摂動効果については異なった答えを与えることを具体的に示すことができる．すなわちこの二つの定義は等価ではない．このように，トポロジカルな弦理論においては，摂動展開を再現するという条件だけでは複数の同等でない非摂動論的定義がありうることが具体的に示されているのである．このことは超弦理論の非摂動論的な構成に取り組む際の重要な教訓になる

と思われる．

7. おわりに

トポロジカルな弦理論には豊富な数学的内容があり，この15年の間に非常に洗練された理論になってきた．ここではこの面についてはほとんど触れることができなかった．むしろこの解説ではトポロジカルな弦理論の物理的応用に焦点を当てることにしたからである．

トポロジカルな弦理論は超弦理論の驚くべき現象を明らかにしてきた．この解説で触れることのできた範囲でも，行列理論とゲージ理論の強結合物理の関係，開いた弦と閉じた弦の 't Hooft 対応とその証明，またブラックホールのエントロピーとそれによる弦理論の非摂動論的定式化が挙げられる．その各々は10年前には想像もつかなかったことである．トポロジカルな弦理論のさらなる応用が見つかる可能性は高いと思われる．

トポロジカルな弦理論は弦理論の「おもちゃの模型」として始まったにもかかわらず，豊富な物理的内容を持つことが明らかになった．もちろんトポロジカルな弦理論は超弦理論のごく一部に光を当てるものであり，その影の部分にはさらに目の覚めるような発見が待ち受けているはずである．トポロジカルな弦理論を超えて，その未知の部分に踏み込むさらに強力な手法が開発されることを期待しつつ，この解説を閉じたい．

謝辞

この解説の原稿に有益なコメントを頂いた青木慎也，稲見武夫，大川祐司，大木谷耕司，大河内豊，河本昇，重森正樹，菅原祐二，立川裕二，橋本幸士の各氏に感謝します．

参考文献

1) M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri and C. Vafa: Commun. Math. Phys. **165** (1994) 311, hep-th/9309140.
2) J. D. Bekenstein: Phys. Rev. D **7** (1973) 2333. S. W. Hawking: Nature **248** (1974) 30.
3) 江口　徹，今村洋介：「素粒子の超弦理論」(岩波書店，2005).
4) A. Strominger and C. Vafa: Phys. Lett. B **379** (1996) 99, hep-th/9601029.
5) 夏梅　誠：日本物理学会誌 **54** (1999) 178.
6) このグループの研究の詳しい解説記事として T. Mohaupt: Fortsch. Phys. **49** (2001) 3, hep-th/0007195 を挙げる．
7) H. Ooguri, A. Strominger and C. Vafa: Phys. Rev. D **70** (2004) 106007, hep-th/0405146.
8) O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz: Phys. Rep. **323** (2000) 183, hep-th/9905111.
9) E. Witten: Commun. Math. Phys. **117** (1988) 353.
10) K. Hori, *et al.*: *Mirror Symmetry*, Clay Mathematics Monographs, Vol. 1 (American Mathematical Society, 2003).
11) 畑　浩之：日本物理学会誌 **60** (2005) 344.
12) E. Witten: Prog. Math. **133** (1995) 637, hep-th/9207094.
13) R. Dijkgraaf and C. Vafa: Nucl. Phys. B **644** (2002) 3, hep-th/0206255.
14) G. 't Hooft: Nucl. Phys. B **72** (1974) 461.
15) R. Gopakumar and C. Vafa: Adv. Theor. Math. Phys. **3** (1999) 1415, hep-th/9811131.
16) H. Ooguri and C. Vafa: Nucl. Phys. B **641** (2002) 3, hep-th/0205297.
17) E. Brezin, C. Itzykson, G. Parisi and J.-B. Zuber: Commun. Math. Phys. **59** (1978) 35.
18) R. Dijkgraaf, R. Gopakumar, H. Ooguri and C. Vafa: hep-th/0504221.

著者紹介

大栗博司氏：　専門は素粒子物理学理論，特に超弦理論と場の量子論．日米の研究交流促進にも貢献していきたいと思っています．www.theory.caltech.edu/~ooguri

(2005年2月28日原稿受付)

Topological String Theory and Its Applications

Hirosi Ooguri

abstract: Topological string was initially introduced as a "toy model" of string theory, but the author and his collaborators discovered that it can be directly applied to problems in superstring theory, which is a unified theory of elementary particles including gravity. We will discuss how topological string theory is used to address important questions in elementary particle physics such as quantum states of black holes and strongly coupled problems in four-dimensional gauge theories.