# Analiza matematyczna *Form przestrzennych*

# Mathematical Analysis of *Spatial Forms*

Piotr Sułkowski

*za tą linią zaczyna się smród przyrodzony*
*a linia żeby istnieć nie potrzebuje ciała*
*jest odwiecznie czysta i niezmienna*

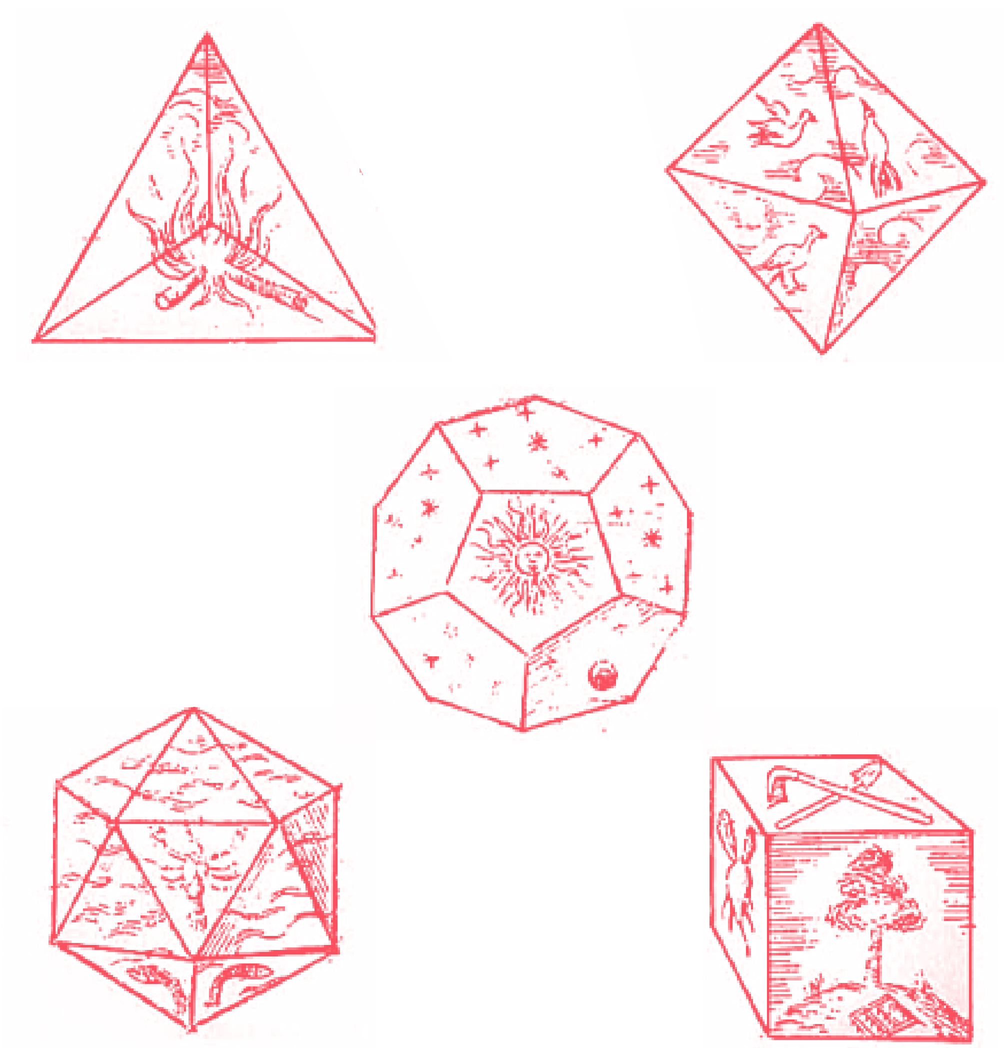
Czesław Miłosz, *Pan od matematyki*

*behind this line innate stench begins*
*and the line to exist does not need body*
*it is forever clean and intact*

Czesław Miłosz, *Math teacher*

Fotografia 1 Jedna z elbląskich *Form przestrzennych* – zdeformowany w wyniku implozji sześcian Hilgemanna. Implozja, czyli wyssanie powietrza, symbolizuje niszczące siły natury działające na materię – tak uważa sam artysta. W niniejszym tekście analizujemy katastroficzne skutki implozji zastosowanej do abstrakcyjnej struktury matematycznej, ściśle związanej z własnościami brył foremnych, których sześcian jest często spotykanym przykładem. fot. Piotr Grdeń.

Picture 1 One of the *Spatial Forms* from Elbląg – Hilgemann's hexahedron, deformed as a result of an implosion. Implosion, i.e. removal of air, according to the artist symbolizes destruction by the forces of Nature acting on matter. In this article we analyze the results of an implosion applied to the abstract mathematical structure, intimately connected to the properties of regular solids, such as a hexahedron. photo: Piotr Grdeń,



Rysunek 1 Pięć brył foremnych – brył platońskich – to: czworościan, ośmiościan, dwunastościan, dwudziestościan, oraz sześcian (od lewej do prawej). W dialogu *Timajos* Platon utożsamił cztery z nich z czterema żywiołami: czworościan reprezentuje ogień, ośmiościan – powietrze, dwudziestościan – wodę, sześcian – ziemię. O istnieniu dwunastościanu filozof dowiedział się później i przypisał mu reprezentację całego wszechświata. Powyższa ilustracja pochodzi z dzieła Keplera *Harmonices Mundi* z 1619 roku.

Figure 1 Five regular solids, or so-called Platonic solids (from left to right): tetrahedron, octahedron, dodecahedron, icosahedron, and hexahedron. In the dialogue *Timaeus* Plato assigned four of these solids to four elements: tetrahedron represents fire, octahedron air, icosahedrons water and hexahedron earth. Plato learnt about the existence of the dodecahedron later, and assigned it as a representative of the whole Universe. The above picture is taken from *Harmonices Mundi* by Kepler, from 1619.

Czy znajomość matematyki i meandrów jej historii może mieć wpływ na nasz odbiór elbląskich *Form przestrzennych* oraz znaczenie, jakie im przypisujemy? Otóż tak. Jak wykażemy poniżej, matematyczna analiza *Form przestrzennych* prowadzi do konkluzji o nieuchronnej katastrofie. Wizja tej katastrofy przedstawiona jest niemalże wprost, bez charakterystycznej dla współczesnej sztuki figury metafory.

Podczas analizy elbląskich *Form* nietrudno zauważyć ich dążenie ku prostocie. Wśród najbardziej wymyślnych kształtów uwagę przykuwają te, które wydają się najprostsze, symetryczne i niepodzielne – w szczególności dzieła Sosnowskiego, Tomaszewskiego, Woźniaka, Berlewiego, Kwiatkowskiego, Hilgemanna. Wśród ich dzieł znajdujemy przeróżne sześciany, czworościany, ośmiościany, kule. Bryły te są intrygujące same w sobie, a także są istotnym budulcem form bardziej skomplikowanych. Równocześnie sprawiają wrażenie, jakby zwiastowały rozkład, kres i koniec. Od momentu powstania, często w samym swoim zamyśle, są pogięte, podziurawione oraz pocięte, a z czasem zaczynają pokrywać je rdza i porosty[1]. Przez to ich konstrukcja sprawia wrażenie zniszczonej i dzięki temu jeszcze bardziej kontrastuje z matematyczną prostotą i idealizmem, który symbolizuje. Niezależnie od tych warstw w pewnym stopniu należą one do świata matematyki. Dlatego nim dokonamy dekonstrukcji tych *Form*, warto przypomnieć te ich własności, które matematyczna spójność

Can the knowledge of mathematics and its history affect our interpretation of *Spatial Forms*? The answer is yes. As we will show in, what leads on from this, that mathematical analysis of *Spatial Forms* reveals an unavoidable catastrophe. This catastrophe is presented explicitly and in almost every detail, without using the metaphors so characteristic of modern art.

Analysis of *Spatial Forms* reveals their simplicity. Among more intricate shapes, the most appealing ones are those which seem to be the simplest, most symmetric, and undividable – in particular works by Sosnowski, Tomaszwski, Woźniak, Berlewi, Kwiatkowski, Hilgemann. Among their sculptures we find a variety of hexahedra (i.e. cubes), tetrahedra, octahedra, spheres. These solids are intriguing in their own rights on one hand, and on the other hand they serve as building blocks of more complicated forms. They also suggest an approaching end. From the moment of their creation they are bent, riddled and cut, and time passing by makes them vulnerable to rust and lichens.[1] Their poor physical shape is strongly contrasted with the mathematical simplicity and idealism that they symbolize. Therefore, independently of their physical ingredients – as to some extent they belong to the realm of mathematics – let us recall their properties, which are imposed by mathematical consistency and which constitute the essence of their abstract being.

1 U schyłku pierwszej dekady XXI wieku niektóre *Formy* elbląskie, w tym pokazany na zdjęciu sześcian Hilgemanna, odnowiono za pomocą zabiegów piaskowania i konserwowania minią. Wiadomo jednak, że ograniczy to wpływ rdzy i porostów jedynie na krótki czas.

1 At the turn of the first decade of the 21st century, some of the Elbląg *Forms*, including the one shown in the photo of Hilgemann's cubes, were renovated with the help of sand and mine conservation treatments. It is known that this does not limit the impact of rusting and lichen for a long time.

sama im narzuca, a które stanowią esencję ich abstrakcyjnego bytu.

Sześcian, czworościan i ośmiościan to wielościany foremne, czyli bryły wypukłe, których wszystkie ściany są przystającymi wielokątami foremnymi, a w każdym ich wierzchołku zbiega się taka sama liczba ścian. Sześcian składa się z sześciu płaszczyzn, z których każda jest kwadratem i w każdym jego wierzchołku zbiegają się trzy takie kwadraty. Cztery ściany czworościanu, czyli piramidy o trójkątnej podstawie (identycznej z jej ścianami), to trójkąty równoboczne. Trójkąt równoboczny lub kwadrat to pierwsze z nieskończonej serii dwuwymiarowych wielokątów foremnych – bez trudu możemy sobie wyobrazić jak wygląda siedmiokąt, dwunastokąt, a także osiemdziesięciokąt. Czy w trzech wymiarach sprawy mają się podobnie? Czy poza czworościanem i sześcianem możemy wyobrazić sobie trójwymiarową bryłę będącą dziewięciościanem foremnym? Czy w mocy artystów tworzących w Elblągu byłoby stworzenie *Form* reprezentujących osiemnastościan lub trzydziestościan foremny?

Odpowiedź na powyższe pytania jest przecząca. Po raz pierwszy w sposób ścisły sformułował ją Euklides, matematyk z Aleksandrii, w swoim słynnym dziele zatytułowanym *Elementy*. W istotny sposób wpłynęło ono na kształt naszej cywilizacji – liczba wydań tego traktatu ustępuje jedynie Biblii. Do przełomu XIX i XX wieku przez ponad dwa tysiące lat *Elementy* stanowiły podstawowy podręcznik szkolny do matematyki. Pięć aksjomatów Euklidesa, sformułowanych na wstępie, przez dwa tysiąclecia określało geometrię, na polu której toczyły się rozgrywki matematyczne. Dopiero w wieku XIX odkryto geometrie nieeuklidesowe, czyli takie, które nie spełniały wszystkich aksjomatów podanych przez myśliciela z Aleksandrii.

*Elementy* składają się z trzynastu ksiąg i w ostatniej księdze można znaleźć najbardziej spektakularne wnioski. Niektórzy badacze

Hexahedrons, tetrahedrons, and octahedrons are known as regular solids, meaning all their walls are the same regular polygons, and in each their vertex the same number of walls meets. The hexahedron consists of six walls, each of which is a square and at each's vertex three such squares meet. The four walls of a tetrahedron, i.e. a pyramid with a triangle base (the same as the walls), are regular triangles. A regular triangle and a square are the first members of an infinite family of two-dimensional regular polygons – it is not hard to imagine seven-gon, twelve-gon, eighty-gon. Is it similar in three dimensions? Apart from the tetrahedron or hexahedron, can we imagine a three-dimensional solid which is a regular nine-dron? Are the artists in Elbląg powerful enough to create *Forms* that represent a regular eighteen-dron or thirty-dron?

The answer to the above questions is negative. It was formulated for the first time in a rigorous manner by Euclid, a mathematician from Alexandria, in his famous *Elements*. *Elements* had an enormous impact on our entire civilization – the only other book with a higher number of editions is the Bible, and for over 2,000 years, until the end of the 19th and start of the 20th centuries *Elements* served as a basic school textbook to teach mathematics. Five axioms by Euclid, formulated at the beginning of *Elements*, for more than 2,000 years defined geometry, which was the playground of mathematics. Only in the 19th century were so-called non-Euclidean geometries found, which do not satisfy all Euclid's axioms. Euclid's *Elements* consist of 13 chapters, with the most spectacular results being derived in the last chapter. Some experts assert that all other chapters, and the entire *Elements*, were written by Euclid mainly in order to present the results of chapter 13.

In chapter 13 of *Elements* Euclid presents a construction and properties of five regular

twierdzą, że Euklides w celu ogłoszenia rezultatów swoich badań napisał księgę XIII, a potem zdecydował, że napisze wszystkie pozostałe ją poprzedzające. Dzięki temu powstały *Elementy*.

W księdze XIII autor podaje konstrukcje i własności pięciu brył foremnych: czworościanu, sześcianu, ośmiościanu, dwunastościanu oraz dwudziestościanu. Natomiast zakończenie tej księgi, a tym samym całych *Elementów*, jest następujące:

<u>Twierdzenie:</u>
Nie istnieją bryły foremne inne niż czworościan, sześcian, ośmiościan, dwunastościan oraz dwudziestościan.

<u>Dowód:</u>
— Każdy wierzchołek bryły foremnej musi być równocześnie wierzchołkiem co najmniej trzech jej ścian w tym wierzchołku się zbiegających.
— Dla każdego wierzchołka bryły suma wszystkich kątów zawartych pomiędzy sąsiednimi krawędziami wychodzącymi z tego wierzchołka musi być mniejsza niż 360°.
— Jako że wszystkie kąty wielokątów tworzących ściany danej bryły są identyczne, to każdy wierzchołek każdej ściany daje wkład do pełnego kąta mniejszy niż $360/3=120°$.
— Wielokąty foremne mające sześć lub więcej krawędzi mają kąty liczące nie mniej niż 120°. Ścianami wielościanów foremnych mogą być więc tylko trójkąty, kwadraty lub pięciokąty. Możliwe przypadki to:

- ściany bryły są trójkątami równobocznymi; dlatego, że kąty w takim trójkącie wynoszą 60°, a suma kątów przy wierzchołku bryły musi być mniejsza niż 360°, to w takim wierzchołku bryły może się zejść: trzy, cztery lub pięć trójkątów równobocznych. Bryły odpowiadające tym przypadkom to czworościan, ośmiościan oraz dwudziestościan;
- ściany są kwadratami: dlatego, że kąty w kwadracie wynoszą 90°, jedyna możliwość to trzy

solids: tetrahedron, hexahedron, octahedron, dodecahedron, and icosahedron. The final section of this book, and of entire *Elements*, includes the following:

<u>Theorem</u>:
No regular solids exist other than tetrahedron, hexahedron, octahedron, dodecahedron, and icosahedron.

<u>Proof</u>:
— Each vertex of a regular solid must be, at the same time, a vertex of at least three walls which meet at this vertex.
— For each vertex of a solid, the sum of all angles lying between two consecutive sides meeting at this vertex must be smaller than 360°.
— As all angles of polygons which constitute the walls of a solid are the same, each vertex of each wall contributes an angle smaller than $360/3=120°$ to the total angle at each vertex.
— Regular polygons which have six or more sides have angles of at least 120°. Therefore the only polygons which can constitute walls of a regular solid are triangles, squares, and fivegons. Possible cases include:

- the walls of a solid are made of regular triangles: as the angles in such triangles are of 60°, and the sum of angles at each vertex of a solid must be smaller than 360°, we conclude that at each vertex only 3, 4 or 5 regular triangles can meet; the corresponding regular solids are tetrahedron, octahedron, and icosahedron
- the walls of a solid are made of squares: as all angles in a square have 90°, the only possibility is to have 3 squares meeting at the vertex of a regular solid; such a solid is hexahedron (i.e. cube)
- the walls of a solid are made of fivegons: as regular fivegons have angles of 108°,

kwadraty schodzące się w wierzchołku bryły, co odpowiada sześcianowi;
- ściany są pięciokątami: pięciokąty foremne mają kąty wynoszące 108°, więc jedyna możliwość to trzy pięciokąty schodzące się w wierzchołku bryły, co odpowiada dwunastościanowi.

Żadne inne bryły foremne nie mogą istnieć.
*Quod erat demonstrandum.*

Zatem istnieje tylko pięć brył foremnych. Skoro tak, to być może są one podstawowymi składnikami nie tylko elbląskich *Form przestrzennych*, lecz także całego naszego świata czy też wszechświata? Idea taka wielokrotnie pojawiała się na przestrzeni dziejów, zarówno przed Euklidesem, jak i po nim, a nawet w czasach najnowszych.

W szczególności bryły foremne nazywa się bryłami platońskimi, ponieważ Platon wiedział o ich istnieniu jeszcze przed Euklidesem. W swym dialogu *Timajos* utożsamił cztery z tych brył z czterema żywiołami (wszystko wskazuje na to, że wtedy nie był jeszcze świadomy istnienia dwunastościanu, który później utożsamił z całym wszechświatem). Ogień to czworościan. Powietrze – ośmiościan. Woda to dwudziestościan. Być może w tym przyporządkowaniu po raz pierwszy w naszych dziejach narodziła się idea istnienia niepodzielnych i fundamentalnych elementów, z których zbudowany jest cały otaczający nas świat. Wreszcie – ziemia to sześcian.

Czy sześcian Platona to ta sama bryła co sześcian Hilgemanna w Elblągu? Z matematycznego punktu widzenia – bez wątpienia tak. Wszak za Euklidesem wykazaliśmy, że innych brył foremnych nie ma i istnieje tylko jeden sześcian. Sześcian Hilgemanna jest zdeformowany w wyniku implozji – wyssania powietrza z jego wnętrza. W następstwie tego stalowa konstrukcja zapada się. Poza tym sześcian Hilgemanna pokrywają rdza i porosty. Po implozji dzieło uległo znacznemu zniszczeniu, a potem degradacja postępowała, czyli katastrofa rozciągnęła się w czasie. Z kolei sześcian Platona to żywioł ziemi. Czyżby tu miał się pojawić moment zatrzymania i zrozumienia nieuchronności naszego losu? Czy zatem żywioł ziemi ma ulec temu samemu procesowi?

Żywioły Platona to niejedyna teoria posługująca się bryłami foremnymi do wyjaśnienia struktury wszechświata. Przecież fakt istnienia skończonej ilości takich brył oraz ich szczególne matematyczne własności są niezwykle interesujące dla umysłów ścisłych. Kepler, jeden z największych astronomów, w dziele pod tytułem *Mysterium Cosmographicum* z 1596 roku twierdził, że znane wtedy planety w Układzie Słonecznym położone są w odległościach proporcjonalnych do rozmiarów brył foremnych wpisanych w siebie i w naprzemienne sfery. Największa z tych sfer, znajdująca się za największym z pięciu brył sześcianem, miała determinować położenie Saturna – najdalszej znanej wówczas planety. Merkury krążyć miał po powierzchni sfery umieszczonej między ośmiościanem a dwudziestościanem. W tak skonstruowanym wszechświecie katastrofa-implozja brył platońskich może być równoznaczna z końcem i rozpadem całego Układu Słonecznego. Warto zauważyć, że bryły platońskie pojawiają się również w innym dziele Keplera, a mianowicie w *Harmonices Mundi* z roku 1619. Z niego pochodzi wyżej przedstawiona ilustracja, na której odnajdujemy raz jeszcze interpretację Platona – widzimy, czym skutkowałoby zniszczenie sześcianu.

Pomysł na wykorzystanie brył platońskich w opisie świata fizycznego pojawił się też współcześnie w pracy amerykańskiego naukowca Roberta Moona. W połowie lat 80. XX wieku zaproponował on model jądra atomowego, zgodnie z którym protony i neutrony zajmowałyby dyskretne położenia odpowiadające wierzchołkom

therefore the only possibility is to have 3 fivegons meeting at the vertex of a regular solid; such a solid is dodecahedron.

No other regular solids can exist.
*Quod erat demonstrandum.*

Therefore only five regular solids exist. In this case one can ask if they could constitute the basic ingredients not only of the *Spatial Forms* in Elbląg, but also of the whole Universe? Such an idea has been in fact been considered many times in our history, before and since Euclid, also including in modern times.

Regular solids are also called Platonic solids, because Plato was already aware (before Euclid) of their existence. In his dialogue *Timaeus* Plato assigned four of these solids with four elements (it is believed that at that moment he was not yet aware of the existence of a dodecahedron, which he later interpreted as representing the entire Universe). Fire is represented by tetrahedron. Air octahedron. Water icosahedron. This may have been the first time in our history that the idea of fundamental, undivisable ingredients of matter was introduced. Finally, the Earth is a hexahedron.

Is Plato's hexahedron the same solid as Hilgemann's hexahedron in Elbląg? From the mathematical point of view undoubtedly it is… Following Euclid, we proved above that no other regular solids exist. Hilgemann's hexahedron is deformed after an implosion – removing air from its inside, so that its steel construction is degraded. Not only is this an unpleasant deformation, but in addition Hilgemann's hexahedron attracts rust and lichens. After the first catastrophe, i.e. an implosion which gave birth to Hilgemann's artwork, its physical degradation, extended in time, continues. On the other hand, Plato's hexahedron is identified with Earth. Should the Earth expect the same sequence of catastrophes?

Plato's elements are not the only idea that took advantage of regular solids to explain the structure of the Universe. Indeed, the very fact of the existence of a finite number of such solids has been very appealing to many. Kepler, one of the most renowned astronomers in history, proposed in *Mysterium Cosmographicum* in 1596 that all planets known at that time are located at distances proportional to the size of regular solids inscribed one into another, and intertwined by spheres. The biggest such sphere, located just behind the biggest solid, i.e. the hexahedron, determined the position of Saturn, the most distant planet known at that time. Mercury supposedly traveled along a sphere located between octahedron and icosahedron. In such a universe a catastrophe, or implosion, of Platonic solids is equivalent to its end, the end of the entire solar system. Let us note that Platonic solids appear in yet another work by Kepler, *Harmonices Mundi*, from 1619, which includes the picture shown above, which once more recalls Plato's vision – here we see explicitly what the consequences of a destruction of the hexahedron are.

The idea of taking advantage of properties of regular solids to describe our physical world can also be found in the work of a modern scientist, Robert Moon. In the mid-1980s he proposed a model of atomic nuclei, according to which protons and neutrons are located at discrete positions, corresponding to vertices of regular solids inscribed one into another (analogously to Kepler's idea). A catastrophe of such a nucleus would mean a catastrophe of ingredients of matter that we know and the world in its present shape could exist no more.

Catastrophes of universes constructed according to ideas of Plato, Kepler, or Moon, are catastrophes of their physical ingredients: the elements, the solar system, the atomic nuclei. Degradation of *Spatial Forms* suggests however a much more dramatic wpisanych w siebie (analogicznie do modelu Keplera) brył foremnych. Katastrofa tak skonstruowanego jądra atomowego oznaczałaby katastrofę składników materii takiej, jaką znamy, a świat w obecnej postaci nie mógłby istnieć.

Rozpad wszechświata skonstruowanego według myśli Platona, Keplera czy też Moona jest katastrofą fizycznych jego składników: żywiołów, Układu Słonecznego, jąder atomowych. Degradacja *Form przestrzennych* sugeruje bardziej drastyczną katastrofę, to znaczy koniec samej logicznej struktury wszechświata. Tej logicznej struktury, z której wynika istnienie pięciu takich a nie innych brył platońskich. Czy jesteśmy w stanie sobie wyobrazić wszechświat bez Układu Słonecznego? Zapewne tak, nawet jeślibyśmy w takim wszechświecie nie mogli istnieć. Wszechświat bez wody, ognia, ziemi i powietrza? Nawet jeśli miałby postać międzyplanetarnej pustki, to też mieści się ona w naszym umyśle. Czym byłby wszechświat, w którym nie istniałoby pięć brył foremnych lub nie dałoby się o nich pomyśleć? Jak wyobrazić sobie katastrofę naszego świata takiego, jaki znamy obecnie, w wyniku której bryły platońskie straciłyby swą logiczną podstawę i rację bytu? Czy cała matematyka też straciłaby rację bytu? Czy możliwy jest wszechświat bez matematyki?

Krytyczny czytelnik zauważy, że świat Platona, Keplera oraz Moona w istocie nie mają wiele wspólnego z rzeczywistością fizyczną, w której żyjemy. Rozwój nauki pokazał, że ogień nie jest jednak tańcem czworościanów. Orbita Merkurego nie jest wyznaczona przez enigmatyczny dwudziestościan, a protony w jądrach atomowych nie obsadzają wierzchołków dwunastościanu. Dlatego istnieje bezpośredni związek brył foremnych ze współczesną fizyką i nowoczesną matematyką i jest on niezwykle ciekawy. Należy najpierw przypomnieć definicję obiektu, który matematycy nazywają grupą, aby lepiej go zrozumieć:

catastrophe – namely, the end of the very logical structure of the Universe. The logical structure which implies that only these five, and no other regular solids exist. Can we imagine a universe without a solar system? Presumably yes, even if we could not exist in such a universe. A universe without water, fire, earth, air? Even if it would consist only of cosmic emptiness, we are able to visualize it in our mind. However, how could a universe exist in which no regular solid would exist, or would be unthinkable (whoever or whatever would be supposed to think)? Or, how could we imagine a catastrophe of the world as we know it, as a consequence of which regular solids would lose their logical bases? Would all mathematics lose its logical basis? Can a universe without mathematics exist?

A careful reader may note that our reality does not have much in common with the worlds devised by Plato, Kepler, or Moon. Science proved that fire is not made of dancing tetrahedra, that Mercury's orbit is not determined by an enigmatic icosahedron, and protons in nuclei are not located at the vertices of a dodecahedron. Nonetheless, an intimate and fascinating connection between regular solids and modern physics and mathematics does exist. To understand it we need to recall the definition of an object, which mathematicians call a group:

Definition

A group is a set equipped in an associative action, which possesses a neutral element, and such that for each element there exists an inverse element.

A group of rotations in two dimensions – i.e. all rotations between 0 and 360° – denoted by professionals by U(1) or SO(2), is an example of a group. In this case an action takes the form of a composition of rotations – a rotation by 50°, followed by rotation by 40°, results in a rotation by 90°. This action is associative: when performing three rotations, e.g. by 50, 40, and 30°, it does not matter if we compose rotations by 50 and 40° first and then perform the last rotation, or perform 50 degree rotation first and then compose two other rotations, i.e. (50+ 40)+30=50+(40+30). A rotation by 0° is a neutral element. An inverse element to a given rotation is the same rotation in the opposite direction, so that a composition of a rotation and its inverse produces a rotation by 0°, i.e. the neutral element.

While the above example is quite simple, much more complicated groups exist. A group of rotations in 3 dimensions has been given a pretty name, SO(3). There is also a related group, having the same local structure, but commensurately twice bigger, which is called SU(2). There is the whole family of such groups, which are called Lie groups; certain elements of this family fit into the so-called ADE classification. Here A denotes an entire series of groups called $A_k$, or equivalently SU(k+1) (where k is an integer number, and SU(2) is the simplest example of such a group). D denotes a series of groups denoted $D_k$, or equivalently SO(2k) (where k is also an integer number). In addition, there are three "exceptional" groups, denoted $E_6$, $E_7$ and $E_8$.

At this stage we can finally make the point – i.e. to address an important question, whether there exist discrete (i.e. having a finite number of elements) subgroups of a group of rotations in 3 dimensions, i.e. SO(3). It is not hard to imagine that one series of such subgroups involves rotations around a fixed axis by an angle of 360/k° (and its multiples), where k is an integer number; such subgroups are denoted $A_k$ (in other words, these are rotations of a pyramid whose base is a regular polygon – such rotations transform this pyramid into itself). Groups in another series, called $D_k$, consist of the same types of rotations, and in addition include taking the mirror image in the plane perpendicular to

Definicja

Grupa to zbiór wyposażony w działanie łączne posiadające element neutralny, a dla każdego elementu istnieje element odwrotny.

Przykładem grupy jest grupa obrotów w dwóch wymiarach oznaczana przez profesjonalistów jako U(1) lub SO(2) – czyli zbiór wszystkich możliwych obrotów od 0 do 360°. W tym przypadku działaniem jest składanie obrotów – wykonanie obrotu o 50°, a następnie o 40°, co daje w sumie obrót o 90°. Działanie to jest łączne: podczas wykonywania kolejno trzech obrotów – na przykład o 50, 40 oraz 30° – nie ma znaczenia, czy najpierw połączymy ze sobą dwa pierwsze, a potem wykonamy trzeci obrót, czy też wykonamy pierwszy, a następnie połączymy dwa następne obroty; czyli (50+40)+30 = 50+(40+30). Elementem neutralnym w tym przykładzie jest obrót o 0°. Elementem odwrotnym do danego obrotu jest obrót o taki sam kąt w przeciwną stronę, tak że złożenie obrotu z obrotem przeciwnym daje obrót o kąt 0 stopni, czyli element neutralny.

O ile powyższy przykład jest prosty, o tyle istnieją grupy bardziej skomplikowane. Grupie obrotów w trzech wymiarach matematycy nadali wdzięczne miano SO(3). Istnieje też pokrewna jej grupa, lokalnie wyglądająca tak samo, ale w odpowiednim sensie dwa razy większa, zwana SU(2). Istnieje cała rodzina takich grup zwanych grupami Liego. Szczególnymi elementami tej rodziny są grupy podlegające tak zwanej klasyfikacji ADE. A oznacza tutaj całą serię grup oznaczanych $A_k$ lub równoważnie SU(k+1) (gdzie k jest liczbą naturalną, a SU(2) jest najprostszym przykładem takiej grupy). D oznacza serię grup typu $D_k$, czyli równoważnie SO(2k) (gdzie k także jest liczbą naturalną). Ponadto istnieją trzy „wyjątkowe" grupy oznaczane jako $E_6$, $E_7$ oraz $E_8$.

Możemy wreszcie przejść do ważnego pytania: jakie istnieją dyskretne (czyli złożone ze skończonej liczby elementów) podgrupy

grupy obrotów w trzech wymiarach, czyli SO(3)? Jak łatwo sobie wyobrazić, jedna seria takich podgrup związana jest z obrotami wokół ustalonej osi o kąt 360/k° (oraz jego wielokrotności), w której k jest liczbą naturalną. Takie podgrupy określa się jako $A_k$ (czyli są to obroty wzdłuż osi piramidy o podstawie będącej wielokątem foremnym – takie obroty przekształcają piramidę w nią samą). Inna seria, zwana $D_k$, złożona jest również z takich obrotów i dodatkowo odbicia lustrzanego w płaszczyźnie prostopadłej do wybranej osi. Są to symetrie prostopadłościanu o podstawie będącej wielokątem foremnym, a oprócz obrotów wokół osi możemy taki prostopadłościan przekształcić na siebie, obracając go o 180°. Jest też oczywistym, że takich dyskretnych grup jest więcej i są one związane z bryłami platońskimi. Rzeczywiście, możemy wyobrazić sobie obroty brył platońskich przekształcające je same w siebie. Okazuje się, że istnieją trzy takie dodatkowe grupy: tzw. $E_6$, reprezentująca symetrie czworościanu; $E_7$, reprezentująca (takie same) symetrie sześcianu i ośmiościanu; oraz $E_8$, reprezentująca (takie same) symetrie dwunastościanu i dwudziestościanu. Istotnie, sześcian i ośmiościan są wobec siebie dualne, tzn. istnieje sposób przeprowadzenia jednego w drugi: łącząc odcinkami środki ścian sześcianu, otrzymujemy ośmiościan, i *vice versa*. Podobnie, łącząc odcinkami środki ścian dwunastościanu, otrzymujemy dwudziestościan, i *vice versa*, zatem te dwie bryły są także wobec siebie dualne. Dlatego też dualne bryły mają te same symetrie, i w rezultacie istnieją tylko trzy dodatkowe dyskretne podgrupy grupy obrotów w trzech wymiarach, zwane – *nomen omen* – $E_6$, $E_7$ oraz $E_8$.

Podsumowanie

Dyskretne obroty w trzech wymiarach podlegają klasyfikacji ADE. Taka sama klasyfikacja pojawia się w rozważaniach dotyczących grup Liego. Ta zbieżność okazuje się nieprzypadkowa. Zwana jest ona korespondencją McKaya – na cześć słynnego matematyka, który wykazał jej bardzo głębokie podstawy i konsekwencje. Badania związane z tą korespondencją są jednym z najistotniejszych działów współczesnej matematyki. Jak wynika z powyższych rozważań, korespondencja ta dotyczy przekroju zagadnień obejmujących tysiąclecia badań matematycznych – począwszy od rozważań Platona i Euklidesa o bryłach foremnych, a skończywszy na współczesnej analizie dotyczącej grup Liego i związanych z nimi jeszcze bardziej abstrakcyjnych tematów, których wciąż nie rozumiemy, a które intensywnie badają dziś matematycy. Podkreślmy wyraźnie: cała ta konstrukcja logiczna nie mogłaby istnieć bez brył foremnych, a także bez przytoczonego powyżej twierdzenia o ich istnieniu.

Wracając do świata fizyki, możemy skupić się na jego aspektach zgodnych z wiedzą współczesną. Jak wiemy obecnie, jego skład, czyli wszystkie cząstki elementarne: elektrony, fotony, kwarki i neutrina, opisuje teoria fizyczna zwana Modelem Standardowym. Teoria ta ma pewne głębokie symetrie oparte o nietrywialną grupę Liego oznaczaną jako iloczyn $U(1)\times SU(2)\times SU(3)$. Gdyby nie ta grupa Liego, to Model Standardowy nie mógłby funkcjonować tak, jak funkcjonuje. Z kolei jego składniki nie miałyby prawa mieć formy takiej, jaką znamy, i nasz świat nie wyglądałby w ten sposób.

Reasumując, bryły platońskie, poprzez klasyfikację ADE i korespondencję McKaya, łączą się z grupami Liego i całą współczesną matematyką. Te same grupy Liego są podstawą Modelu Standardowego opisującego fizyczny świat i wszechświat taki, jaki znamy. Dlatego katastrofa i degradacja brył platońskich oznacza katastrofę zarówno całego świata matematyki, jak i całego naszego wszechświata. Czy możemy temu zaradzić? Na to pytanie matematyka nie

the fixed axis (these are therefore symmetries of a polyhedron whose base is a regular polygon – apart from rotations around the axis, such a polyhedron can be transformed into itself by a rotation by 180°). It is also clear that there are more such discrete groups, which are related to Platonic solids. Indeed, we can imagine rotations of Platonic solids that transform them into themselves. It turns out that there are 3 such additional groups: the so-called $E_6$, which represents symmetries of a tetrahedron, $E_7$, which represents (the same) symmetries of hexahedron and octahedron; and $E_8$, which represents (the same) symmetries of a dodecahedron and icosahedrons. Indeed, the hexahedron and octahedron are dual to each other, i.e. there is a simple way to transform one into another: if we connect by new intervals the centers of the walls of a hexahedron we obtain an octahedron, and *vice versa*. Similarly, connecting by new intervals the centers of the walls of a dodecahedron we obtain icosahedrons, and *vice versa*, so these two solids are also dual to each other. For this reason the dual solids have the same symmetries, and in consequence there are only 3 additional discrete subgroups of a rotation group in 3 dimensions, which are called – *nomen omen* – $E_6$, $E_7$ and $E_8$.

Recapitulation

Discrete rotations in three dimensions fit into the ADE classification. The same classification arises in the context of Lie groups. This is not just a coincidence, and these two classes of problems that fit into the ADE classification are related by the so-called McKay correspondence, so called so as to commemorate the famous mathematician who discovered this relations and its deeper implications. The McKay correspondence and its various incarnations is currently very actively studied by mathematicians. As follows from the above, this correspondence is related to the whole spectrum of topics, from considerations by Plato and Euclid about regular solids, to the modern analysis of Lie groups. It should be stressed that this entire logical construction could not be found without the ideas behind regular solids, and without the theorem given above.

On the physics side, we can finally also focus on its modern aspects. As we know now, our Universe consists of elementary particles – electrons, photons, quarks, neutrinos, etc. – which are described by a physical theory known as the Standard Model. This theory has certain deep symmetries, based on a nontrivial Lie group denoted as $U(1)\times SU(2)\times SU(3)$. Had it not been for this Lie group, the Standard Model would not work as it does, all its ingredients would not take the form which we know, and our world would not look as it does.

To sum up, Platonic solids, via the ADE classification and the McKay correspondence, are related to Lie groups and, more generally, to the vast areas of modern mathematics. The same Lie groups underlie the construction of the Standard Model, which describes our physical world. Therefore, the catastrophe and degradation of Platonic solids results in the catastrophe of the entire world of mathematics, as well as the entire Universe. Can we prevent such a catastrophe? This is a question that mathematics cannot answer… There are issues which are beyond the frontier of our understanding; perhaps all that remains is, as long as we can, to contemplate symmetries of *Spatial Forms*, and the lines of the poem which we cited at the beginning:

*the paper ship set sail*
*we wandered through some neglected orchards*
*Jenny tore her dress among raspberries*
*towns lit up far away*
*and everything went to sleep.*

daje już odpowiedzi. Pewne kwestie znajdują się poza granicą naszego rozumienia. Być może jedyne, co nam pozostaje, to kontemplacja symetrii *Form* lub dalsza lektura utworu, którego fragment został przytoczony na początku:

*papierowy okręcik odpłynął*
*szliśmy przez jakieś zapuszczone sady*
*Jadwiga w maliniaku rozdarła sukienkę*
*daleko zapalały się miasta mirohrady*
*i wszystko ogarnął sen.*